UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Maksim Maydanskiy

Final
1MA016/1MA183 Several Variable Calculus
2017-08-25

Exam time: 8:00 – 13:00. Tools allowed: only materials for writing. Please provide full explanations and calculations in order to get full credit. The final consists of 8 problems worth 5 points each, for a total of 40 points. For grades 3,4, and 5, one should obtain 18, 25, and 32 points, respectively. You may write your solutions in English or Swedish.

Swedish translation of the problems follows. In case of ambiguities or discrepancies, the English version takes precedence.

1. (5 points) A point moves along the curve of intersection of of the cylinder $z = x^2$ and the plane $x + y = 2$ in the direction of increasing y with constant speed $s = 3$. Find the velocity vector $\vec{v}$ of the point at $P = (1, 1, 1)$.

2. (a) (2 points) What is the equation of the tangent plane of the surface $x^2 z - e^{yz} = 1$ at the point $P = (1, 0, 2)$?

   (b) (2 points) For what unit direction vector $\hat{u}$ in $\mathbb{R}^3$ is the directional derivative $D_{\hat{u}}(x^2 z - e^{yz})$ maximal at $P = (1, 0, 2)$?

   (c) (1 point) Can the equation $x^2 z - e^{yz} = 1$ be solved for z as a function of (x, y) near $(x_0, y_0) = (1, 0)$?

3. (5 points) Find the greatest and the smallest values of $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$ on the half-ball $x^2 + y^2 + z^2 \leq 70$, with $z \geq 0$. (Hint: Draw a picture, or several. The boundary of half-ball consists of two parts. Explain your reasoning as much as you can.)

4. (5 points) Does the improper integral $\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(|x|+|y|)} dA$ converge or diverge? If it converges, find it's value. Explain your reasoning as much as possible.

5. (5 points) Find the volume of the region given by intersection of $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z$ and $z^2 \geq x^2 + y^2$. (Hint: Depending on your method, you may or may not need solve $a^2 + b^2 = 2b$ for b as function of a; this can be done moving all terms with b to one side and completing the square.)

6. (5 points) Find the flux of $\vec{F} = x^2 \hat{i} + z\hat{k}$ through the part of the surface $z = 4 - x^2$ with $z \geq 0, -1 \leq y \leq 1$.

7. Compute the circulation $\int_c \vec{F} \cdot d\vec{r}$ of $\vec{F} = (x^2 y, \frac{1}{3}x^3, x^2 - y^2)$ around the curve C which is the intersection of the hyperbolic paraboloid $z = xy$ and the cylinder $x^2 + y^2 = 4$, oriented counterclockwise as viewed from above.

8. (ODE aka 1MA016)

   (a) (3 points) Find the general solution of $y'''(t) - y''(t) - 2y'(t) = 0$.

   (b) (2 points) Find the solution to initial value problem
   $y'''(t) - y''(t) - 2y'(t) = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 4$, $y''(0) = 2$.

8. (TOP aka 1MA183)

   (a) Does $f_n(x) = \frac{1}{x+1+x/n}$ converge pointwize on $[0, \infty)$ as $n \to \infty$? Does it converge uniformly (on the same domain $[0, \infty)$)?

   (b) Determine if $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{1}{x+1+x/n} dx$ exists, and if it does, compute the limit value.

GOOD LUCK!

UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Maksim Maydanskiy

Slutprov
1MA016/1MA183 Flervariabelanalys
2017-08-25

Skrivtid: 8.00 - 13.00. Tillåtna hjälpmedel: endast skrivdon. För full poäng bör fullständiga förklaringar och uträkningar presenteras. Tentamen består av 8 frågor om 5 poäng vardera, alltså totalt 40 poäng. För betygen 3, 4, 5 krävs minst 18, 25, 32 respektive poäng. Svaren får anges antingen på svenska eller på engelska.

I händelse av tvetydigheter eller avvikelser har den engelska versionen företräde.

1. (5 poäng) En punkt rör sig längs med skärningskurvan för cylindern $z = x^2$ och planet $x + y = 2$ i riktning med stigande y med konstant fart $s = 3$. Beräkna hastighetsvektorn $\vec{v}$ för punkten i $P = (1, 1, 1)$.
2. (a) (2 poäng) Vilken ekvation har tangentplanet till ytan $x^2z - e^{yz} = 1$ i punkten $P = (1, 0, 2)$?

   (b) (2 poäng) För vilken riktningsvektor $\hat{u}$ av längd 1 in $\mathbb{R}^3$ är riktningsderivatan $D_{\hat{u}}(x^2z - e^{yz})$ maximal i $P = (1, 0, 2)$?

   (c) (1 poäng) Kan ekvationen $x^2z - e^{yz} = 1$ lösas med z som en funktion av (x, y) nära $(x_0, y_0) = (1, 0)$?
3. (5 poäng) Finn det största respektive det minsta värdet hos $f(x, y, z) = x + y + z$ på halvellipsoiden $x^2 + 2y^2 + 4z^2 \leq 84$, där $z \geq 0$.
4. (5 poäng) Hitta det största och det minsta värdet hos $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$ på halvbollen $x^2 + y^2 + z^2 \leq 70$, med $z \geq 0$. (Ledtråd: Rita en bild eller flera. Halvbollens rand består av två delar. Förklara ditt resonemang så mycket du kan.)
5. (5 poäng) Konvergerar integralen $\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(|x|+|y|)} dA$ eller divergerar den? Om den konvergerar, beräkna dess värde. Förklara hur du resonerar så långt som möjligt.
6. (5 poäng) Beräkna volymen av regionen som ges av $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z$ och $z^2 \geq x^2 + y^2$. (Ledtråd: Beroende på vilken metod du använder kan det hända att du måste lösa $a^2 + b^2 = 2b$ för b som en funktion av a; detta kan göras genom att föra över alla termer som innehåller b till en sida och kvadratkomplettera.)
7. (5 poäng) Beräkna flödet av $\vec{F} = x^2\hat{\imath} + z\hat{k}$ genom den del av ytan $z = 4 - x^2$ där $z \geq 0, -1 \leq y \leq 1$.
8. Beräkna cirkulationsintegralen $\int_c \vec{F} \cdot d\vec{r}$ av $\vec{F} = (x^2y, \frac{1}{3}x^3, x^2 - y^2)$ runt kurvan C som utgör snittet mellan den hyperboliska paraboloiden $z = xy$ och cylindern $x^2 + y^2 = 4$, orienterad moturs sedd från ovan.

9. (ODE dvs 1MA016)

   (a) (3 poäng) Hitta den allmänna lösningen till $y'''(t) - y''(t) - 2y'(t) = 0$.

   (b) (2 poäng) Hitta lösningen till begynnelsevärdesproblemet
   $y'''(t) - y''(t) - 2y'(t) = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 4$, $y''(0) = 2$.

10. (TOP dvs 1MA183)

    (a) Konvergerar $f_n(x) = \frac{1}{x+1+x/n}$ punktvis på $[0,\infty)$ då $n \to \infty$? Konvergerar den likformigt (på samma domän $[0,\infty)$)?

    (b) Avgör om $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{1}{x+1+x/n} dx$ existerar, och om den gör det, beräkna gränsvärdet.

LYCKA TILL!