UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Hania Uscka-Wehlou

Omtenta i matematik
Flervariabelanalys 1MA016/1MA183
3 april 2018
E2, E3, Frist, ES1, F1, GyLärarMa1, KandMa1

Skrivtid: 8:00–13:00. Tillåtna hjälpmedel: skrivdon. Det maximala poängtalet för varje uppgift är 5 poäng. För betygen 3, 4, 5 krävs minst 18, 25 resp. 32 poäng. Alla svar ska motiveras med lämpliga beräkningar eller med en hänvisning till lämplig teori. Skriv din tentakod på varje ark.

1. Visa att:

a) följande gränsvärde är lika med 0:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy\left(x^2-y^2\right)}{x^2+y^2},$$

b) följande gränsvärde inte existerar:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}.$$

Deluppgiften a) ger maximalt 3 poäng, deluppgiften b): 2 poäng. För att få full poäng, bör man motivera noga.

2. Bestäm alla C^1 funktioner $f(x,y)$ som uppfyller den partiella differentialekvationen

$$\frac{\partial f}{\partial x} - 3\frac{\partial f}{\partial y} = x, \quad (x,y)\in\mathbb{R}^2$$

och villkoret $f(0,y)=e^y$ för alla $y\in\mathbb{R}$, genom att införa de nya variablerna $\begin{cases} u = 3x+y \\ v = x. \end{cases}$

3. Bestäm största och minsta värdena för funktionen $f(x,y,z)=\sqrt{x}yz^2$ i området D där

$$D = \{(x,y,z);\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0,\ x+y+z=1\}.$$

(Ett svar i produktform duger, man behöver inte multiplicera faktorerna.)

–Var god vänd–

4. Beräkna

$$\iint_D \frac{(x+y)^2}{1+x^2+y^2}dxdy \qquad \text{där} \qquad D=\{(x,y);\ x^2+y^2\leq 1\}.$$

5. Bestäm flödet av vektorfältet

$$\mathbf{F}=\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}, \frac{z}{x^2+y^2}\right)$$

ut genom cylinderns C sidoyta (*mantelyta*), dvs den ytan vars normalvektor pekar bort från z-axeln.

$$C:\ \ x^2+y^2=2,\ \ -2\leq z\leq 2.$$

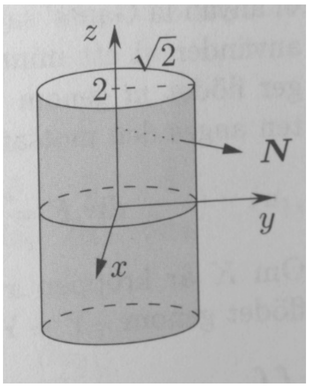

Figure 1: Bara den gråa ytan (uppgift 5).

6. Undersök och motivera med lämpliga beräkningar vilka av följande vektorfält som är konservativa, och bestäm i förekommande fall en potentialfunktion.

a) $\mathbf{F}(x,y)=(y-2x, x-1)$

b) $\mathbf{F}(x,y)=(2x-y, x+1)$.

–Var god vänd–

7. Låt $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ (se bilden) där

- Γ_1 ges av $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x) = (x, x^2)$ för x från -1 till 1,
- Γ_2 ges av $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x) = (x, 1)$ för x från 1 till -1.

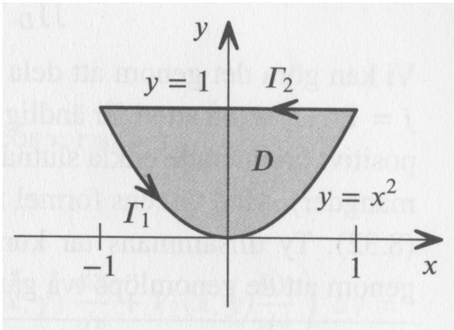

Figure 2: Kurvan Γ (uppgift 7).

Låt $\mathbf{F} = y^2\mathbf{i} + x^2\mathbf{j}$. Beräkna $\int_\Gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ på två sätt:

a) m.h.a. en direkt uträkning (2p)

b) m.h.a. Greens formel (3p).

8. (**OBS**: bara ett av följande problem ska lösas, beroende på spår som du har följt)

(i) (spår **ODE-1MA016**) Bestäm alla lösningar till systemet av differentialekvationer:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 1729y \\ \dfrac{dy}{dt} = y \end{cases}$$

(ii) (spår **TOP-1MA183**) Låt

$$f_n(x) = \frac{2nx}{1+n^2x^2} \quad \text{och} \quad g_n(x) = \frac{2x}{1+n^2x^2}$$

för $n = 1, 2, \ldots$ och för $x \in \mathbb{R}$. Visa att både funktionsföljder konvergerar mot samma gränsfunktion och att:

a) funktionsföljden f_n inte konvergerar likformigt,

b) funktionsföljden g_n konvergerar likformigt.

Lycka till!