1 (a)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy\,(x^2-y^2)}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{r^2\sin\theta\cos\theta\cdot r^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)}{r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)} =$$

byte till polära koordinater

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

$$= \lim_{r\to 0}\left(r^2\cdot\frac{1}{2}\sin 2\theta\cdot\cos 2\theta\right) = \lim_{r\to 0}\left(\underset{\downarrow\, 0}{r^2}\cdot\frac{1}{4}\sin 4\theta\right) = 0$$

trig. ettan,
$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$
$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

oavsett θ

begränsat

ty $|\sin 4\theta| \le 1$

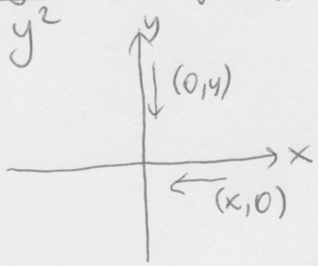
Eller m.h.a. instängningsprincipen

$$0 \le \left|\frac{1}{4}r^2\cdot\sin 4\theta\right| \le \frac{1}{4}r^2$$

oavsett θ.

$r\to 0$: $0 \to 0$, $\left|\frac{1}{4}r^2\sin 4\theta\right| \to 0$, $\frac{1}{4}r^2 \to 0$

(b)
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$
vi kollar t.ex. längs koordinat-axlarne:



$$\lim_{(x,0)\to(0,0)} \frac{x^2-0}{x^2+0} = 1$$

$$\lim_{(0,y)\to(0,0)} \frac{0-y^2}{0+y^2} = -1.$$

Eftersom vi får olika värden längs olika vägar mot origo, vet vi att gränsvärdet inte existerar.

Rättningsförslag:

a: 3p:
1p: bytet till polära koordinater,
1p: korrekt uträkning med rätta trigonometriska formler,
1p: slutsats (instängningsprincipen eller argument som "produkt av en funktion med gränsvärde noll i en viss punkt och en begränsad funktion har gränsvärde noll i denna punkt").

b: 2p:
1p: ett bra val av två riktningar som ger olika värden,
1p: korrekt uträkning+slutsats.

1. Visa att:

a) följande gränsvärde är lika med 0:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy\left(x^2-y^2\right)}{x^2+y^2},$$

b) följande gränsvärde inte existerar:

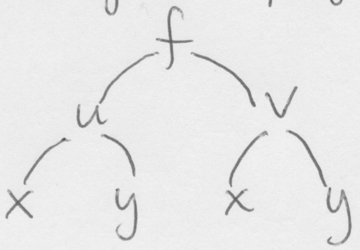
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}.$$

Deluppgiften a) ger maximalt 3 poäng, deluppgiften b): 2 poäng. För att få full poäng, bör man motivera noga.

$$\frac{\partial f}{\partial x} - 3\frac{\partial f}{\partial y} = x$$

Variabelbyte $\begin{cases} u = 3x + y \\ v = x \end{cases}$

Enligt kedjeregeln:
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{=3} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\underbrace{\frac{\partial v}{\partial x}}_{=1} =$$



$$= 3\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\underbrace{\frac{\partial u}{\partial y}}_{=1} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\underbrace{\frac{\partial v}{\partial y}}_{=0} = \frac{\partial f}{\partial u}$$

Ekvationen $\frac{\partial f}{\partial x} - 3\frac{\partial f}{\partial y} = x$ blir alltså i variabler u och v:

$$\boxed{3\cancel{\frac{\partial f}{\partial u}} + \frac{\partial f}{\partial v} - 3\cdot\cancel{\frac{\partial f}{\partial u}} = v}$$

alltså $\boxed{\frac{\partial f}{\partial v} = v}$

Detta ger: $f(u,v) = \frac{v^2}{2} + \varphi(u)$

där $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ - godtycklig deriverbar funktion

Vi återvänder till x och y:

$$f(x,y) = \frac{x^2}{2} + \varphi(3x+y).$$

Villkoret $f(0,y) = e^y$ ger: $f(0,y) = 0 + \varphi(0+y) =$
$$= \underline{\varphi(y) = e^y}$$

alltså $\varphi(3x+y) = e^{3x+y}$

Svar: $\boxed{f(x,y) = \frac{x^2}{2} + e^{3x+y}}$

Rättningsförslag:

2p: kedjeregeln rätt tillämpad,

1p: ekvation i de nya variablerna,

1p: lösning av differentialekvationen,

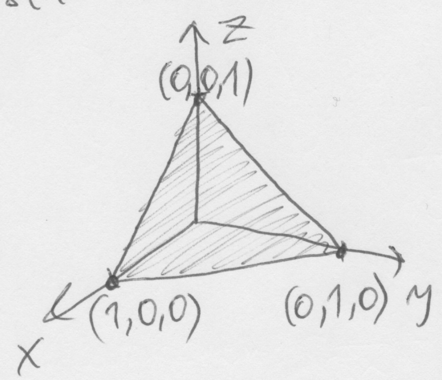
1p: villkoret => korrekt lösning.

2. Bestäm alla C^1 funktioner $f(x,y)$ som uppfyller den partiella differentialekvationen
$$\frac{\partial f}{\partial x} - 3\frac{\partial f}{\partial y} = x, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$
och villkoret $f(0,y) = e^y$ för alla $y \in \mathbb{R}$, genom att införa de nya variablerna $\begin{cases} u = 3x + y \\ v = x. \end{cases}$

$f(x,y,z) = \sqrt{x}\cdot y \cdot z^2$

$D = \{(x,y,z);\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0,\ x+y+z=1\}$.

Område D är en kompakt triangel i första oktanten, f är kontinuerlig, alltså uppnår garanterat sina max och min i D.



Vi noterar att $f(x,y,z)\geq 0$ för alla $(x,y,z)\in D$ och att $f(x,y,z)=0$ om $x=0$, $y=0$ eller $z=0$, alltså på områdets rand.

Detta betyder att $\boxed{\min_D f(x,y,z) = 0}$.

Maximum måste antas i en punkt där

$$\boxed{x>0,\ y>0,\ z>0,\ g(x,y,z)=x+y+z-1=0}$$

I maxpunkten är ∇f parallell med ∇g (Lagrange!).

$$\nabla f(x,y,z) = \left(\frac{yz^2}{2\sqrt{x}},\ \sqrt{x}z^2,\ 2\sqrt{x}yz\right)$$

$$\nabla g(x,y,z) = (1,1,1).$$

$\nabla f \parallel \nabla g$ betyder att $\boxed{\frac{\frac{yz^2}{2\sqrt{x}}}{1} = \frac{\sqrt{x}z^2}{1} = \frac{2\sqrt{x}yz}{1}}$.

Vi multiplicerar detta med $\frac{2\sqrt{x}}{z}$ och får:

$\boxed{yz = 2xz = 4xy}$, vilket ger: (ty $x,y,z\neq 0$)

$y=2x$, $z=4x$, $1=x+2x+4x=7x \Rightarrow \boxed{x=\frac{1}{7}}$

Vi har därför den unika lösningen $(x,y,z)=(\frac{1}{7},\frac{2}{7},\frac{4}{7})$ vilket måste vara max-punkten.

Max-värdet är $f(\frac{1}{7},\frac{2}{7},\frac{4}{7}) = \frac{\sqrt{7}}{7}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{16}{49} = \frac{32}{49^2}\sqrt{7} = \frac{32}{2401}\sqrt{7}$.

Rättningsförslag:

1p: minimum,

1p: rätt ansats till Lagranges metod, antingen med lambda parameter eller med parallella gradienter (proportionella komponenter),

2p: korrekt genomförande av Lagranges metod: lösning av ekvationssystemet på komponenterna plus insättning i villkoret $g(x,y,z) = 0$; och separat hantering av variabler lika med noll (om någon inte gör det sistnämnda, men gör resten rätt, föreslår jag att ge ett minus, inget poängavdrag),

1p: rätt svar.

+: om någon påpekar att både min och max i D existerar eftersom området är kompakt (ev. slutet och begränsat) och funktionen kontinuerlig. Fast inget måste: räknar man ut (motiverar) min och max, är det lika bra.

3. Bestäm största och minsta värdena för funktionen $f(x,y,z) = \sqrt{x}yz^2$ i området D där

$$D = \{(x,y,z);\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0,\ x+y+z=1\}.$$

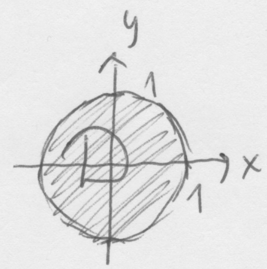
(Ett svar i produktform duger, man behöver inte multiplicera faktorerna.)

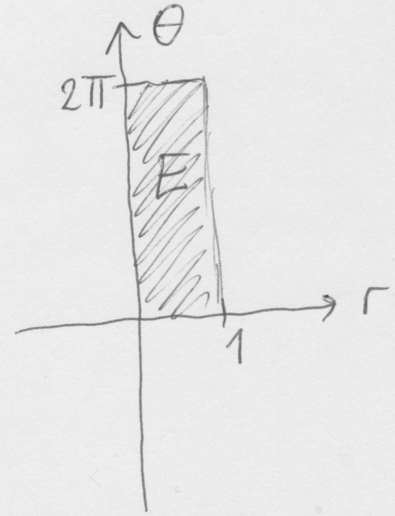
$$\iint_D \frac{(x+y)^2}{1+x^2+y^2}\,dxdy\ , \qquad D=\{(x,y);\ x^2+y^2\le 1\}.$$

Koordinatbyte till polära koordinater:

$$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \\ (x^2+y^2=r^2)\end{cases} , \quad \underbrace{0\le r\le 1\ ,\ 0\le \theta\le 2\pi}_{\text{cirkelskivan } D}$$

$\boxed{\text{funktionaldeterminanten} = r.}$





$$\iint_D \frac{(x+y)^2}{1+x^2+y^2}\,dxdy =$$

$$= \iint_E \frac{(r\cos\theta+r\sin\theta)^2}{1+r^2}\,r\,d\theta dr =$$

$$= \int_0^1 \frac{r^3}{1+r^2}\,dr \cdot \int_0^{2\pi}\left(1+2\sin\theta\cos\theta\right)d\theta =$$

$$= \int_0^1 \left(r-\frac{r}{1+r^2}\right)dr \cdot \left(\int_0^{2\pi} d\theta + 2\int_0^{2\pi}\sin\theta\cos\theta\,d\theta\right) =$$

$$= \left[\frac{r^2}{2}-\frac{1}{2}\ln(1+r^2)\right]_0^1 \cdot \left(2\pi + \underbrace{\left[\sin^2\theta\right]_0^{2\pi}}_{\text{noll}}\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln 2\right)\cdot 2\pi =$$

$$= \boxed{\pi(1-\ln 2)} \leftarrow \text{svaret.}$$

För den första integralen t.ex.

$$\frac{r^3}{1+r^2} = \frac{r(r^2+1)-r}{1+r^2} = r - \frac{r}{1+r^2}$$

och variabelbyte i den andra delen: $1+r^2=u$, $2r\,dr = du$

För den andra integralen subst. $\sin\theta = u$, $\cos\theta\, d\theta = du$

Rättningsförslag:

1p: byte till polära koordinater, både integralen och integreringsområdet,

1p: en bra bit på väg med beräkningen av integralen och rätt hantering av trigonometrin,

1p: integralen med rationell funktion rätt hanterat,

1p: den trigonometriska delen av integralen rätt hanterat,

1p: rätt svar.

4. Beräkna

$$\iint_D \frac{(x+y)^2}{1+x^2+y^2}dxdy \qquad \text{där} \qquad D=\{(x,y);\ x^2+y^2\le 1\}.$$

5. Lösningsförslag 1 – utan att parametrisera cylindern.

På mantelytan $x^2+y^2=2$ är den utåtriktade normalen i varje punkt:

$$\vec{N} = \frac{(x,y,0)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x,y,0)$$ utåt, horisontellt

På mantelytan är också

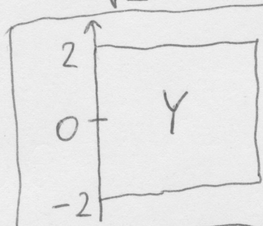
$$\vec{F} = \frac{1}{2}(x,y,z)$$ (ty $x^2+y^2=2$)

och vi kan beräkna:

$$\vec{F}\cdot\vec{N} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(x,y,z)\cdot(x,y,0) = \frac{1}{2\sqrt{2}}(x^2+y^2) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Flödet ut genom mantelytan Y är därmed:

$$\iint_Y \vec{F}\cdot\vec{N}\,dS = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\iint_Y dS = \frac{1}{\sqrt{2}}(Y\text{:s area}) = \frac{8\sqrt{2}\pi}{\sqrt{2}} = 8\pi$$



← cirkelns längd $2\pi\cdot\sqrt{2}$

$A(Y) = 4\cdot 2\pi\cdot\sqrt{2} = 8\sqrt{2}\pi$

Lösningsförslag 2 – med parametrisering av cylindern:

$\vec{r}(s,t) = (\sqrt{2}\cos s, \sqrt{2}\sin s, t)$, $\underbrace{0\le s\le 2\pi,\ -2\le t\le 2}_{D}$ ← D, parametermängden

$$\vec{N} = \vec{r}_s{}' \times \vec{r}_t{}' = (-\sqrt{2}\sin s, \sqrt{2}\cos s, 0)\times(0,0,1) = (\sqrt{2}\cos s, \sqrt{2}\sin s, 0).$$

↑ detta är en utåtriktad normal.

Flödet ut genom mantelytan Y är

$$\iint_Y \vec{F}\cdot\vec{N}\,dS = \iint_D \vec{F}\cdot(\vec{r}_s{}'\times\vec{r}_t{}')\,ds\,dt.$$

På mantelytan är $x^2+y^2=2$, $\vec{F} = \frac{1}{2}(\underbrace{\sqrt{2}\cos s}_{x}, \underbrace{\sqrt{2}\sin s}_{y}, \underbrace{t}_{z})$ och

$$\vec{F}\cdot(\vec{r}_s{}'\times\vec{r}_t{}') = \frac{1}{2}(\sqrt{2}\cos s, \sqrt{2}\sin s, t)\cdot(\sqrt{2}\cos s, \sqrt{2}\sin s, 0) \underset{\text{trig. ettan}}{=} 1$$

Därför är flödet ut genom mantelytan:

$$\int_0^{2\pi}\int_{-2}^{2} 1\,ds\,dt = 2\pi\cdot 4 = 8\pi.$$

Rättningsförslag:

1p: framtagning av en normalvektor på något sätt,

1p: rätt formel för beräkning av flödet,

2p: skalärprodukt och integralen korrekt, fast möjligen med något litet fel,

1p: rätt svar.

5. Bestäm flödet av vektorfältet

$$\mathbf{F} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}, \frac{z}{x^2+y^2}\right)$$

ut genom cylinderns C sidoyta (*mantelyta*), dvs den ytan vars normalvektor pekar bort från z-axeln.

$$C:\ x^2+y^2=2,\ -2\le z\le 2.$$

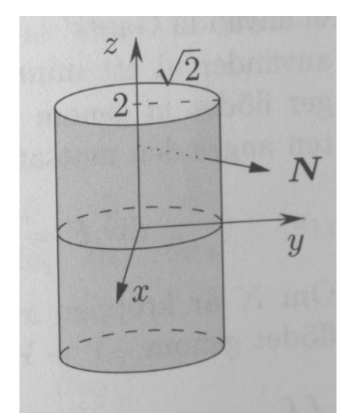


Figure 1: Bara den gråa ytan (uppgift 5).

(a) För $\vec{F}(x,y) = (y-2x, x-1)$ har vi

$$\frac{\partial}{\partial y}(y-2x) = 1 = \frac{\partial}{\partial x}(x-1).$$

Vektorfältet är definierat på hela xy-planet (ett enkelt sammanhängande område), så vet vi att det finns en potentialfunktion $U(x,y)$ sådan att $\nabla U = \vec{F}$.

Funktionen U uppfyller:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = y - 2x \quad , \quad \frac{\partial U}{\partial y} = x - 1.$$

Integrering m.a.p. x ger

$$U(x,y) = yx - x^2 + \varphi(y),$$

där $\varphi(y)$ är en envariabelfunktion som beror bara på y, inte på x.

Deriveringen m.a.p. y ger:

$$x + \varphi'(y) = x - 1$$

vilket leder till $\varphi'(y) = -1$, alltså $\varphi(y) = -y + C$.

En potentialfunktion är t.ex.

$$\boxed{U(x,y) = yx - x^2 - y}.$$

(b) För $\vec{F}(x,y) = (2x-y, x+1)$ har vi

$$\frac{\partial}{\partial y}(2x-y) = -1 \neq \frac{\partial}{\partial x}(x+1) = 1$$

partielle derivator är olika, vilket betyder att vektorfältet inte är konservativt (likheten av partielle deriv. är ett NÖDVÄNDIGT villkor för konservativa fält).

Rättningsförslag:

a: totalt max 4p:
1p: kollar det nödvändiga villkoret,
1p: ställer upp ekvationerna för potentialfunktioner,
1p: någon bra slutsats om funktionernas utseende, genom integrering av en av ekvationerna,
1p: rätt slutsats med användning av den andra ekv.

b: **1p**

6. Undersök och motivera med lämpliga beräkningar vilka av följande vektorfält som är konservativa, och bestäm i förekommande fall en potentialfunktion.

a) $\mathbf{F}(x,y) = (y - 2x, x - 1)$

b) $\mathbf{F}(x,y) = (2x - y, x + 1)$.

Direkt uträkning:

$$\int_\Gamma \vec F(\vec r)\cdot d\vec r = \int_{\Gamma_1} \vec F(\vec r)\cdot d\vec r + \int_{\Gamma_2}\vec F(\vec r)\cdot d\vec r =$$

$$= \int_{-1}^{1} \vec F(\vec r)\cdot \frac{d\vec r}{dx}\,dx - \int_{-1}^{1} \vec F(\vec r)\cdot\frac{d\vec r}{dx}\,dx =$$

$$= \left[\, y=x^2 \text{ och } \frac{d\vec r}{dx} = \langle 1,2x\rangle, \text{ resp. } y=1 \text{ och } \frac{d\vec r}{dx}=\langle 1,0\rangle \right] =$$

$$= \int_{-1}^{1} \langle x^4, x^2\rangle\cdot\langle 1,2x\rangle\, dx - \int_{-1}^{1} \langle 1,x^2\rangle\cdot\langle 1,0\rangle\, dx \underset{\uparrow\ \text{skalär produkt}}{=}$$

$$= \int_{-1}^{1} (x^4+2x^3)\,dx - \int_{-1}^{1} dx = \left[\frac{x^5}{5} - \frac{2x^4}{4}\right]_{-1}^{1} - 2 = \frac{2}{5} - 2 = \boxed{-\frac{8}{5}}$$

Greens formel:

$$\vec F(x,y) = \langle y^2, x^2\rangle = \langle P(x,y), Q(x,y)\rangle$$

$$\boxed{P(x,y)=y^2,\quad Q(x,y)=x^2,\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=2x,\quad \frac{\partial P}{\partial y}=2y}$$

$$\oint_\Gamma \vec F(\vec r)\cdot d\vec r = \int_\Gamma P\,dx+Q\,dy \underset{\uparrow\ \text{Green}}{=} \iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy =$$

$$= \iint_D (2x-2y)\,dx\,dy = \left[\, D \text{ ges av } -1\le x\le 1,\ x^2\le y\le 1, \text{ (är ett } y\text{-enkelt område)} \right] =$$

$$= \int_{-1}^{1}\left(\int_{x^2}^{1} (2x-2y)\,dy\right)dx = \int_{-1}^{1} \left[2xy-y^2\right]_{x^2}^{1} dx =$$

$$= \int_{-1}^{1} (2x - 1 - 2x^3 + x^4)\,dx = \left[-x+\frac{x^5}{5}\right]_{-1}^{1} = -2+\frac{2}{5} = \boxed{-\frac{8}{5}}$$

udda försvinner, intervallet är sym. enligt 0

Rättningsförslag:

a: max 2p
1p: korrekt insättning av alla element i formeln,
1p: integralen rätt beräknad (ett minus vid ett riktigt litet räknefel).

b: max 3p
1p: korrekt framtagning av alla element som ska med i Greens formel och rätt användning av satsen,
1p: dubbelintegralen korrekt uppställd, med korrekt integreringsordning (OBS: *D* är också *x*-enkel och integreingen åt andra hållet fungerar lika fint!),
1p: korrekt uträkning av den itererade integralen.

7. Låt $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ (se bilden) där

- Γ_1 ges av $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x) = (x, x^2)$ för x från -1 till 1,
- Γ_2 ges av $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x) = (x, 1)$ för x från 1 till -1.

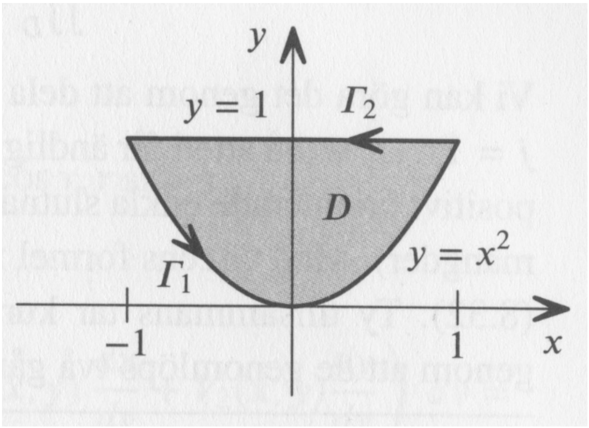


Figure 2: Kurvan Γ (uppgift 7).

Låt $\mathbf{F} = y^2\mathbf{i} + x^2\mathbf{j}$. Beräkna $\int_\Gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ på två sätt:

a) m.h.a. en direkt uträkning (2p)

b) m.h.a. Greens formel (3p).

) $\boxed{\text{ODE}}$

$$\begin{cases} x' = x + 1729y \\ y' = y \end{cases}$$

Systemet kan skrivas på matrisform:

$$\vec{r}\,'(t) = A\vec{r}(t)$$

där

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1729 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vi hitter egenvärden som rötter till det karakteristiske polynomet:

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1729 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2$$

$\lambda = 1$ är ett egenvärde med multiplicitet 2.

Exponentialmatrisen:

$$e^{tA} = e^{\lambda t}\left(I + (A-\lambda I)t\right) \overset{\lambda=1}{=} e^t\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1729 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} t\right) =$$

$$= e^t \begin{pmatrix} 1 & 1729t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Kolonnerne i exponentialmatrisen ger två linjärt oberoende lösninger och allmän lösning är

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 \cdot e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^t \cdot \begin{pmatrix} 1729t \\ 1 \end{pmatrix}. \quad \longleftarrow \boxed{\text{Svaret}}$$

linjär kombination till kolonnerne

Rättningsförslag:

1p: omskrivning av systemet till matrisform,

1p: uppställning och lösning av den karakteristiska ekvationen,

1p: exponentialmatrisen rätt,

1p: rätt tolkning av detta exponentialmatrisen innehåller,

1p: rätt svar.

(spår **ODE-1MA016**) Bestäm alla lösningar till systemet av differentialekvationer:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 1729y \\ \dfrac{dy}{dt} = y \end{cases}$$

8. TOP Det finns många metoder för att visa att både f_n och g_n konvergerar till $f(x)=0$ $\forall_x$.

⊛ Punktvis konvergens:

$$f_n(0)=\frac{0}{1}=0 \ \forall_n \quad , \quad g_n(0)=\frac{0}{1+0}=0 \ \forall_n$$

Om $x\neq 0$:

$$f_n(x)=\frac{2nx}{1+n^2x^2}=\frac{2}{\underbrace{\frac{1}{nx}}_{\to 0}+\underbrace{nx}_{\to\infty}}\xrightarrow{n\to\infty}0$$

dividera med nx

$$g_n(x)=\frac{\overbrace{2x}^{2x}}{\underbrace{1+n^2x^2}_{\infty}}\xrightarrow{n\to\infty}0$$

~~dividd med x~~ behövs ej; uttrycket är bestämt

⊛ Likformig konvergens

$$f_n(x)=\frac{2nx}{1+n^2x^2}$$

$$\forall_{n,x}\quad \boxed{-1\le\frac{2nx}{1+n^2x^2}\le 1}$$

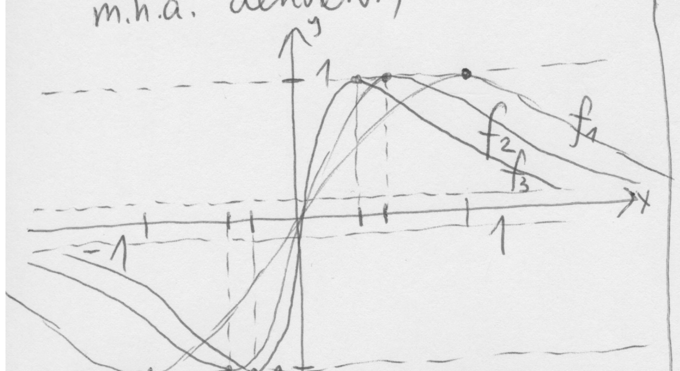
$$1+2nx+n^2x^2\ge 0 \Leftrightarrow (1+nx)^2\ge 0$$

$$1-2nx+n^2x^2\ge 0 \Leftrightarrow (1-nx)^2\ge 0$$

Har ett min $f_n(-\frac{1}{n})=-1$

max $f_n(-\frac{1}{n})=1$

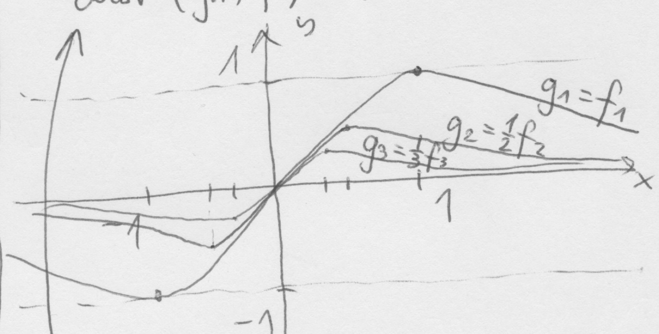
(man kan också visa detta m.h.a. derivator)



dist$(f_n,f)=1$ – ingen likformig konvergens.
Problem runt 0.

$$g_n(x)=\frac{2x}{1+n^2x^2}=\frac{1}{n}\cdot f_n(x)$$

$$\text{dist}(g_n,f)=\frac{1}{n}\xrightarrow{n\to\infty}0$$



detta i sig räcker, men man kan bevisa den likformiga konvergensen från definitionen

$$g_n\xrightarrow{l}f \quad (\Leftrightarrow \text{dist}(g_n,f)\to 0)$$

$$\Updownarrow$$

här $f(x)=0$

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{n_\varepsilon}\ \forall_{n>n_\varepsilon}\ \forall_{x\in\mathbb{R}}\ |g_n(x)-0|<\varepsilon$$

$$\Uparrow$$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}|g_n(x)|=\text{dist}(g_n,0)\le\varepsilon$$

Räcker att ta $n_\varepsilon=\lfloor\frac{1}{\varepsilon}\rfloor+1$

Fungerar för varje x.

Rättningsförslag:

2p: punktvis konvergens rätt för f_n och g_n,

3p: resten är svår att beskriva, eftersom det finns olika sätt på vilka man kan hantera frågan om likformig konvergens: m.h.a. epsilon-definitionen eller m.h.a. avståndet mellan funktioner. Bedömer man avståndet från funktionerna i följden till gränsfunktionen m.h.a. funktionernas graf, kan man också få full poäng om man visar att man förstår att det är supremum-avståndet som är avgörande. Användning av derivator är lika bra som uppskattning av funktionernas max och min m.h.a. olikheter. Båda sätten är bra om man bara ställer rätt fråga (hur mycket funktionerna skiljer sig från gränsfunktionen).

(spår **TOP-1MA183**) Låt

$$f_n(x)=\frac{2nx}{1+n^2x^2} \quad \text{och} \quad g_n(x)=\frac{2x}{1+n^2x^2}$$

för $n=1,2,\ldots$ och för $x\in\mathbb{R}$. Visa att både funktionsföljder konvergerar mot samma gränsfunktion och att:

a) funktionsföljden f_n inte konvergerar likformigt,

b) funktionsföljden g_n konvergerar likformigt.