UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Hania Uscka-Wehlou

Tentamen i matematik
Flervariabelanalys 1MA016
14 januari 2019
K2, KeKand3, X2, GyLärarMa1

Skrivtid: 14:00–19:00. Tillåtna hjälpmedel: skrivdon. Det maximala poängtalet för varje uppgift är 5 p. För betygen 3, 4, 5 krävs minst 18, 25 resp. 32 p. Eventuella bonuspoäng från duggan räknas vid minst 16 p. på tentan. Alla svar ska motiveras med lämpliga beräkningar eller med en hänvisning till lämplig teori. Skriv din tentakod på varje ark.

1. Undersök om följande gränsvärden existerar och bestäm i så fall deras värden.

$$\text{a)} \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2}, \qquad \text{b)} \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{5x^2+y^2}{x^2+3y^2}.$$

   Deluppgiften a) ger max 3 poäng, b): 2 poäng. Motivera noga för att få full poäng.

2. Använd lämpliga varianter av kedjeregeln vid derivering av följande funktioner:

   a) Beräkna derivatan $g'(t)$ för $g(t) = f(x(t), y(t))$, där $f(x,y) = e^{x^2y} + xy$, och $x(t) = \cos t$, $y(t) = \sin t$.

   b) Beräkna första ordningens partiella derivator för $z = f(x,y)$ med avseende på s och t, där $x = 5s - e^t$ och $y = \sin t + \cos(2s)$.

   Deluppgiften a) ger max 3 poäng och deluppgiften b) ger max 2 poäng.

3. Bestäm största och minsta värdena för funktionen $f(x,y,z) = y$ under bivillkoren $g(x,y,z) = x+y+z-1 = 0$ och $h(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1 = 0$ (4 poäng). Vilka ytor beskrivs av bivillkoren och vilken sorts kurva är deras skärningsmängd? (1 poäng).

–Var god vänd–

4. Beräkna trippelintegralen

$$\iiint_K z\,dxdydz$$

där kroppen K definieras av de tre olikheterna $x^2+y^2 \le z^2, \quad x^2+y^2+z^2 \le 1, \quad z \ge 0.$

5. Beräkna kurvintegralen $\oint_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$, där γ är den positivt orienterade randen till området $x^2+y^2 \le 1,\ 0 \le y \le x$ (rita området!), och

$$\vec{F}(x,y) = \left(\frac{y^3}{3} + 9x^3 - x^2 + \sin x + 4,\ \frac{x^3}{3} + 8y^5 - 7y^3 + e^{2y} + 3y + 6\right).$$

6. Låt $\vec{F}(x,y,z) = (3x^2yz + zye^{xz},\ x^3z + e^{xz},\ x^3y + xye^{xz})$.

   a) (4 poäng) Kontrollera (skriftligt) att fältet $\vec{F}$ uppfyller tre nödvändiga villkor för att vara konservativt och hitta en potentialfunktion för $\vec{F}$.

   b) (1 poäng) Beräkna $\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$ där γ är en godtycklig kurva med startpunkten $(5,0,3)$ och slutpunkten $(7,2,0)$.

7. Bestäm flödet av vektorfältet $\mathbf{F}$ ut genom det axelparallella rätblocket

$$K = \{(x,y,z);\ 0 \le x \le 3,\ 0 \le y \le 4,\ 0 \le z \le 1\}, \quad \text{då :}$$

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (y^2z + x + z\cos y,\ -x^2y + e^{2x+3z},\ z^2 + 4xy - \sin y^2 + 15e^{2x+y}).$$

8. Bestäm alla lösningar till följande differentialekvationer:

   a) (ger max 3p) $\quad (x^2+y)dx + (x-2y)dy = 0$

   b) (ger max 2p) $\quad y^{(4)} + y''' - 2y'' = 0.$

Lycka till!