1. Undersök om följande gränsvärden existerar och bestäm i så fall deras värden.

a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2}$, b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{5x^2+y^2}{x^2+3y^2}$.

Deluppgiften a) ger max 3 poäng, b): 2 poäng. Motivera noga för att få full poäng.

UPPGIFT 1

a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = \left[\begin{array}{l}\text{polär koordinatbyte}\\ x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{array}\right] =$

$\displaystyle = \lim_{r\to 0} \frac{r^2\cos^2\theta\cdot r\sin\theta}{r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)} \underset{\substack{\text{triggettan}\\ \text{och förkortning}\\ \text{med } r^2}}{=} \lim_{r\to 0} r\cdot\cos^2\theta\sin\theta = 0$

oavsett θ

bevisas m.h.a instängningssatsen

$\forall\theta \quad 0 \le |r\cos^2\theta\sin\theta| \le r \xrightarrow{r\to 0} 0$

$|\sin x|\le 1,\ |\cos x|\le 1$

eller - en produkt av en funktion som har gränsvärde noll vid $r\to 0$ ($f(r)=r$) och en begränsad funktion ($g(\theta)=\cos^2\theta\sin\theta$) har gränsvärde noll vid $r\to 0$.

b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{5x^2+y^2}{x^2+3y^2}$. Det räcker att visa att vi får två olika värden längs olika vägar som går mot $(0,0)$.

① Längs x-axeln: ($y=0$) $\displaystyle\lim_{(x,0)\to(0,0)} \frac{5x^2+0}{x^2+3\cdot 0} = \lim_{(x,0)\to(0,0)} \frac{5x^2}{x^2} = 5$

② Längs y-axeln: ($x=0$) $\displaystyle\lim_{(0,y)\to(0,0)} \frac{0+y^2}{0+3y^2} = \lim_{(0,y)\to(0,0)} \frac{y^2}{3y^2} = \frac{1}{3}$

Två olika värden, alltså gränsv. existerar ej.

2. Använd lämpliga varianter av kedjeregeln vid derivering av följande funktioner:

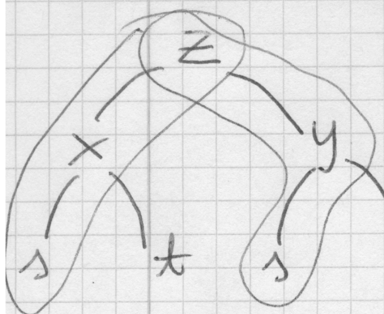
a) Beräkna derivatan $g'(t)$ för $g(t) = f(x(t), y(t))$, där $f(x, y) = e^{x^2 y} + xy$, och $x(t) = \cos t$, $y(t) = \sin t$.

b) Beräkna första ordningens partiella derivator för $z = f(x, y)$ med avseende på s och t, där $x = 5s - e^t$ och $y = \sin t + \cos(2s)$.

Deluppgiften a) ger max 3 poäng och deluppgiften b) ger max 2 poäng.

---

b)



$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s} = $$
$$= \frac{\partial z}{\partial x}\cdot 5 + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot(-2\sin(2s))$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t} = $$
$$= \frac{\partial z}{\partial x}\cdot(-e^t) + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\cos t$$

Svar: $\boxed{\frac{\partial z}{\partial s} = 5\frac{\partial z}{\partial x} - 2\sin(2s)\cdot\frac{\partial z}{\partial y}}$

$\boxed{\frac{\partial z}{\partial t} = -e^t\cdot\frac{\partial z}{\partial x} + \cos t\cdot\frac{\partial z}{\partial y}}$

(man kan också skriva $\frac{\partial f}{\partial s}$ och $\frac{\partial f}{\partial t}$, $\frac{\partial f}{\partial x}$ och $\frac{\partial f}{\partial y}$; f_s, f_t, f_x, f_y också OK)

$\boxed{\text{UPPGIFT 2}}$

a)

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "\vec{r}"] \arrow[rr, bend right, "g"'] & \mathbb{R}^2 \arrow[r, "f"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

Metod 1

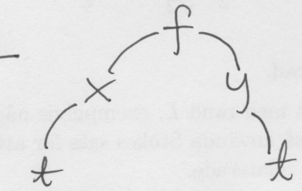
$$g(t) = f(x(t), y(t)) \overset{\text{f:s def.}}{=} e^{x(t)^2 y(t)} + x(t)y(t) \overset{\text{x:s och y:s def.}}{=}$$
$$= e^{\cos^2 t \sin t} + \cos t \sin t \overset{\text{sinus av dubbelvinkel}}{=} e^{\cos^2 t \sin t} + \frac{1}{2}\sin 2t$$

derivata av envariabelfunktion

kedjeregel (envariabelvariant)

$$g'(t) = e^{\cos^2 t \sin t}\cdot\underbrace{(-2\cos t \sin t \cdot \sin t + \cos^3 t)}_{\text{produktregeln för inrederivatan}} + \cos 2t =$$
$$= e^{\cos^2 t \sin t}(\cos^3 t - 2\cos t \sin^2 t) + \cos 2t$$

Metod 2



$x(t) = \cos t$, $y(t) = \sin t$

$x'(t) = -\sin t$, $y'(t) = \cos t$

$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot y'(t) = (2xye^{x^2y} + y)\cdot(-\sin t) +$$

$\boxed{f(x,y) = e^{x^2y} + xy}$

$$+ (x^2e^{x^2y} + x)\cos t \overset{\text{insättning för } x(t) \text{ och } y(t)}{=} e^{\cos^2 t \sin t}(-2\cos t \sin^2 t + \cos^3 t) +$$

$$+ \underbrace{\cos^2 t - \sin^2 t}_{=\cos 2t} = e^{\cos^2 t \sin t}(-2\cos t \sin^2 t + \cos^3 t) + \cos 2t.$$

Samma resultat.

3. Bestäm största och minsta värdena för funktionen $f(x,y,z) = y$ under bivillkoren $g(x,y,z) = x + y + z - 1 = 0$ och $h(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ (4 poäng). Vilka ytor beskrivs av bivillkoren och vilken sorts kurva är deras skärningsmängd? (1 poäng).

$\boxed{\text{UPPGIFT 3}}$

$$f(x,y,z)=y \quad \Rightarrow \quad \nabla f(x,y,z)=(0,1,0)$$
$$g(x,y,z)=x+y+z-1 \quad \Rightarrow \quad \nabla g(x,y,z)=(1,1,1)$$
$$h(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-1 \quad \Rightarrow \quad \nabla h(x,y,z)=(2x,2y,2z)$$

Ytorna $g(x,y,z)=0$ och $h(x,y,z)=0$ beskriver ett plan, respektive en sfär. Deras skärningsmängd är en cirkel, alltså en kompakt mängd. Funktionen f är kontinuerlig (ett polynom) och ~~har~~ uppnår därför sina extremvärden på denna mängd.

Extrempunkterna hittas m.h.a. Lagranges metod ("Fall 3"), som lösningar till ekvationssystemet:

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} -\nabla f- \\ -\nabla g- \\ -\nabla h- \end{vmatrix} = 0 \\ g(x,y,z)=0 \\ h(x,y,z)=0 \end{cases} \iff \begin{cases} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix} = 0 \quad \text{utv. längs rad 1} \\ x+y+z=1 \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2x & 2z \end{vmatrix} = 0 \\ x+y+z=1 \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x-2z=0 \\ x+y+z=1 \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases} \iff \begin{cases} x=z \\ 2x+y=1 \\ 2x^2+y^2=1 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} z=x \\ y=1-2x \\ 2x^2+(1-2x)^2=1 \end{cases} \overset{\text{kvadreringsregel}}{\iff} \begin{cases} z=x \\ y=1-2x \\ 6x^2-4x=0 \end{cases} \iff x(3x-2)=0$$

$\boxed{x=0}$ ($z=0$, $y=1$) eller $\boxed{x=\frac{2}{3}}$ ($z=\frac{2}{3}$, $y=-\frac{1}{3}$)

Två extrempunkter.

$\boxed{\text{MAXIMUM}}$

$$f(0,1,0)=1, \quad f\left(\tfrac{2}{3},-\tfrac{1}{3},\tfrac{2}{3}\right)=-\tfrac{1}{3} \quad \boxed{\text{MINIMUM}}$$

■

4. Beräkna trippelintegralen

$$\iiint_K z\,dxdydz$$

där kroppen K definieras av de tre olikheterna $x^2+y^2 \le z^2$, $\quad x^2+y^2+z^2 \le 1$, $\quad z \ge 0$.

Lösningen börjar här:

UPPGIFT 4

Metod 1 – rymdspolär koordinatbyte

$$\iiint_K z\,dxdydz = \left[\begin{array}{l|r} x = R\sin\Phi\cos\theta & 0\le R\le 1 \\ y = R\sin\Phi\sin\theta & 0\le\theta\le 2\pi \\ z = R\cos\Phi & 0\le\Phi\le\frac{\pi}{4} \\ dxdydz = R^2\sin\Phi\, d\Phi dR d\theta, & \end{array}\right]$$

$$= \int_0^1\left(\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \underbrace{R\cos\Phi}_{z}\cdot R^2\cdot\sin\Phi\, d\Phi\right)d\theta\right)dR =$$

$$= \int_0^1 R^3 dR \cdot \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}\sin 2\Phi\, d\Phi =$$

Fubini på ett axdparallellt rätblock och $\cos\Phi\sin\Phi = \frac{1}{2}\sin 2\Phi$

$$= \left[\frac{R^4}{4}\right]_0^1 \cdot 2\pi\left(-\frac{1}{4}\cos 2\Phi\right)_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{4}\cdot 2\pi\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(\cos\frac{\pi}{2}-\cos 0\right)$$

$$= -\frac{\pi}{8}\cdot(0-1) = -\frac{\pi}{8}\cdot(-1) = \boxed{\frac{\pi}{8}}$$

Metod 2 – Fubini's sats på ett z-enkelt område.

Skärningsmängden av ~~klotet~~ sfären $x^2+y^2+z^2=1$ och konen $\sqrt{x^2+y^2} = z$ är en cirkel i planet $z=c$ parallellt med xy-planet.

Hitta kurvan: $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ x^2+y^2=z^2 \end{cases} \Rightarrow 2z^2=1$

$z=\sqrt{\frac{1}{2}}$

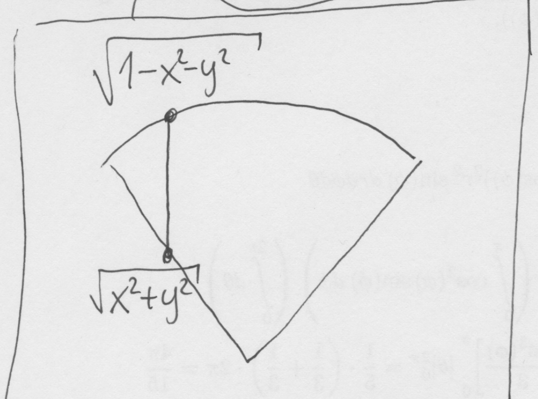
(hos oss $z>0$)

D är cirkelskivan $x^2+y^2\le\frac{1}{2}$.

Lösningen fortsätter här:

$$\iiint_K z\,dxdydz = \iint_D\left(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z\,dz\right)dxdy = \iint_D\left[\frac{z^2}{2}\right]_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dxdy =$$

Fubini på z-enkla omr.



$$= \frac{1}{2}\cdot\iint_D\left(1-x^2-y^2-(x^2+y^2)\right)dxdy =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\iint_D\left(1-2(x^2+y^2)\right)dxdy =$$

$$= \left[\begin{array}{l|l} \text{polärt koordinatbyte} & \\ x = r\cos\theta & 0\le r\le\sqrt{\frac{1}{2}} \\ y = r\sin\theta & 0\le\theta\le 2\pi \\ dxdy = r\,dr\,d\theta & x^2+y^2=r^2 \end{array}\right] = \frac{1}{2}\cdot\int_0^{\sqrt{\frac{1}{2}}}\left(\int_0^{2\pi}(1-2r^2)r\,d\theta\right)dr =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 2\pi\cdot\int_0^{\sqrt{\frac{1}{2}}}(r-2r^3)\,dr = \pi\cdot\left[\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{2}\right]_0^{\sqrt{\frac{1}{2}}} =$$

integranden beror inte på θ

$$= \pi\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\right) = \boxed{\frac{\pi}{8}} \leftarrow \text{svar.}$$

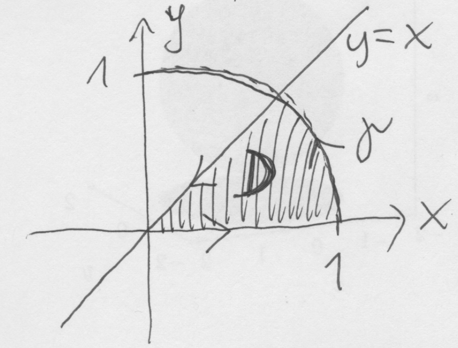
5. Beräkna kurvintegralen $\oint_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$, där γ är den positivt orienterade randen till området $x^2+y^2\le 1,\ \ 0\le y\le x$ (rita området!), och

$$\vec{F}(x,y)=\Big(\frac{y^3}{3}+9x^3-x^2+\sin x+4,\ \frac{x^3}{3}+8y^5-7y^3+e^{2y}+3y+6\Big).$$

UPPGIFT 5

Vi använder Greens sats. Alla antaganden är uppfyllda. Fältet är C^1 i hela området (komponentfunktionerna är summor av polynom, trigonometriska funktioner och exponentialfunktionen). Inga singulära punkter.

Området är r-enkelt, randen är positivt orienterad, styckvis C^1.



Greens sats säger att

$$\oint_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy$$

$$P(x,y)=\frac{y^3}{3}+9x^3-x^2+\sin x+4 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial P}{\partial y}=y^2}$$

$$Q(x,y)=\frac{x^3}{3}+8y^5-7y^3+e^{2y}+3y+6 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial Q}{\partial x}=x^2}$$

$$\oint_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}=\iint_D (x^2-y^2)\,dx\,dy=\left[\begin{array}{l|l}\text{polärt koordinatbyte} & \\ x=r\cos\theta & 0\le r\le 1\\ y=r\sin\theta & 0\le\theta\le\frac{\pi}{4}\\ dx\,dy=r\,dr\,d\theta & \end{array}\right]=$$

$$=\int_0^1\!\!\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\cdot r^2\cdot r\,d\theta\,dr =$$

Fubini på en axelparallell rektangel; och $\cos^2\theta-\sin^2\theta=\cos 2\theta$

$$=\int_0^1 r^3\,dr\cdot\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\theta\,d\theta=$$

$$=\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1\cdot\left[\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{=1}=\boxed{\frac{1}{8}} \leftarrow \text{svar.}$$

6. Låt $\vec{F}(x,y,z) = (3x^2yz + zye^{xz},\ x^3z + e^{xz},\ x^3y + xye^{xz})$.

a) (4 poäng) Kontrollera (skriftligt) att fältet $\vec{F}$ uppfyller tre nödvändiga villkor för att vara konservativt och hitta en potentialfunktion för $\vec{F}$.

b) (1 poäng) Beräkna $\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$ där γ är en godtycklig kurva med startpunkten $(5,0,3)$ och slutpunkten $(7,2,0)$.

$\boxed{\text{UPPGIFT 6}}$

$$P(x,y,z) = 3x^2yz + zye^{xz}$$
$$Q(x,y,z) = x^3z + e^{xz}$$
$$R(x,y,z) = x^3y + xye^{xz}$$

a)
$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \iff 3x^2z + ze^{xz} = 3x^2z + ze^{xz} \ ✓$$
$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} \iff 3x^2y + (ye^{xz} + xyze^{xz}) = 3x^2y + (ye^{xz} + xyze^{xz}) \ ✓$$
$$\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} \iff x^3 + xe^{xz} = x^3 + xe^{xz} \ ✓$$

Hitta en potentialfunktion: $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

s.a. $\nabla\Phi = \langle P, Q, R\rangle$

① $\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 3x^2yz + zye^{xz} \implies \Phi(x,y,z) = x^3yz + ye^{xz} + \varphi(y,z)$

② $\frac{\partial \Phi}{\partial y} = x^3z + e^{xz} \implies \frac{\partial}{\partial y}\left(x^3yz + ye^{xz} + \varphi(y,z)\right) = x^3z + e^{xz} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(y,z)$

$x^3z + e^{xz}$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}(y,z) = 0 \implies \varphi(y,z) = \psi(z)$$

③ $\frac{\partial \Phi}{\partial z} = x^3y + xye^{xz} \implies \frac{\partial}{\partial z}\left(x^3yz + ye^{xz} + \psi(z)\right) = x^3y + xye^{xz} + \psi'(z)$

$x^3y + xye^{xz}$

$$\psi'(z) = 0 \implies \psi(z) = C$$

En potentialfunktion: $\Phi(x,y,z) = x^3yz + ye^{xz}$

b) Fundamentalsatsen för konservativa vektorfält ger:

$$\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = \Phi(7,2,0) - \Phi(5,0,3) = (7^3\cdot 2\cdot 0 + 2\cdot e^0) - (5^3\cdot 0\cdot 3 + 0\cdot e^{15}) = 2 - 0 = \boxed{2}.$$

7. Bestäm flödet av vektorfältet **F** ut genom det axelparallella rätblocket

$$K = \{(x,y,z);\ \ 0 \le x \le 3,\ 0 \le y \le 4,\ 0 \le z \le 1\}, \quad \text{då}:$$

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (y^2 z + x + z\cos y,\ -x^2 y + e^{2x+3z},\ z^2 + 4xy - \sin y^2 + 15e^{2x+y}).$$

UPPGIFT 7

Alla antaganden av Gauss sats är uppfyllda: $\vec{F}$ är C^1 i hela rätblocket (polynom, sinus, cosinus, exponentialfunktionen), ytan är styckvis C^1, rätblocket är z-enkelt.

$$\text{Flödet} = \iint_Y \vec{F}\cdot d\vec{S} \underset{K}{=} \iiint \operatorname{div}(\vec{F})\,dx\,dy\,dz = \circledast$$

$\boxed{K\text{ - hela rätblocket}, \ \partial K = Y \text{ - ytan orienterad utåt}}$

$$\operatorname{div}(\vec{F}) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \boxed{1 - x^2 + 2z}$$

$$\circledast = \iiint_K (1-x^2+2z)\,dx\,dy\,dz \underset{\text{Fubinis sats}}{=} \int_0^3 \left(\int_0^4 \left(\int_0^1 (1-x^2+2z)\,dz \right) dy \right) dx =$$

$$= 4 \cdot \int_0^3 \left[z - zx^2 + z^2 \right]_0^1 dx = 4 \cdot \int_0^3 (1 - x^2 + 1)\,dx =$$

integranden beror ej på y

i.s.f. z

$$= 4 \cdot \int_0^3 (2 - x^2)\,dx = 4 \cdot \left[2x - \frac{x^3}{3} \right]_0^3 = 4 \cdot (6 - 9) =$$

$$= 4(-3) = \boxed{-12}$$

8. Bestäm alla lösningar till följande differentialekvationer:

a) (ger max 3p) $(x^2 + y)dx + (x - 2y)dy = 0$

b) (ger max 2p) $y^{(4)} + y''' - 2y'' = 0.$

UPPGIFT 8 a)

$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ är exakt om

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$$

här $\dfrac{\partial(x-2y)}{\partial x} = \dfrac{\partial(x^2+y)}{\partial y}$

båda är lika med 1.

Lösningskurvor är nivåkurvor till en potential.

Potentialen $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uppfyller villkoren:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = x^2 + y \implies \Phi(x,y) = \frac{x^3}{3} + xy + \varphi(y)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = x - 2y = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^3}{3} + xy + \varphi(y)\right) =$$

$$= x + \varphi'(y)$$

$$\varphi'(y) = -2y \implies \varphi(y) = -y^2 + C$$

Slutsats: en potentialfunktion: $\Phi(x,y) = \frac{x^3}{3} - y^2 + xy.$

Lösningskurvor: $\boxed{\frac{x^3}{3} - y^2 + xy = C}$, $C \in \mathbb{R}$.

b)

ODE: $y^{(4)} + y^{(3)} - 2y'' = 0$

Den karakteristiska ekvationen: $r^4 + r^3 - 2r^2 = 0.$

Vänsterledet faktoriseras:

$$r^4 + r^3 - 2r^2 = r^2(r^2 + r - 2) = r^2(r-1)(r+2).$$

pq-formeln eller kvadratkompl.

Ekvationen har dubbelrot $r_1 = 0$ och två enkelrötter: $r_2 = 1$ och $r_3 = -2$. Detta ger följande form på allmänlösning till ODEn:

svar $\rightarrow$ $\boxed{y(t) = C_1 + C_2 t + C_3 e^{t} + C_4 e^{-2t}}$, $C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}$.

$e^0 = 1$ $t \cdot e^0 = t$ $e^{r_2 t}$ $e^{r_3 t}$