UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Hania Uscka-Wehlou

Omtenta i matematik
Flervariabelanalys 1MA016/1MA183
18 april 2019
E2, E3, Frist, ES1, F1, GyLärarMa1, KandMa1

Skrivtid: 8:00–13:00. Tillåtna hjälpmedel: skrivdon. Det maximala poängtalet för varje uppgift är 5 poäng. För betygen 3, 4, 5 krävs minst 18, 25 resp. 32 poäng. Alla svar ska motiveras med lämpliga beräkningar eller med en hänvisning till lämplig teori. Skriv din tentakod på varje ark.

1. Låt $f(x, y) = x^3 + y^2 + 2xy - 4x - 3y + 5$.

   a) Bestäm och klassificera alla stationära punkter till f. Redovisa alla dina beräkningar.

   b) Beräkna f:s riktningsderivata i punkten $(1, 0)$ i riktning med vektorn $3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$.

2. Funktionen $f(u, v)$, sådan att $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, är differentierbar i hela $\mathbb{R}^2$. Sätt

$$h(x, y, z) = f\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right), \quad y > 0,\ z > 0.$$

   Visa med hjälp av en lämplig variant av kedjeregeln för den sammansatta funktionen h att

$$x\frac{\partial h}{\partial x} + y\frac{\partial h}{\partial y} + z\frac{\partial h}{\partial z} = 0.$$

3. Bestäm största och minsta värdena för funktionen $f(x, y) = xy$ under bivillkoret $g(x, y) = 9x^2 + 4y^2 - 36 = 0$.

4. Beräkna

$$\iint_D (xy + x^2y + 5)\, dxdy \qquad \text{där} \qquad D = \{(x, y);\ x^2 + y^2 \leq 4,\ \ y \geq 0\}.$$

–Var god vänd–

5. Beräkna kurvintegralen

$$\oint_\gamma (e^{x+y} - y + \sin^3 x)dx + (e^{x+y} + 16y^5 + 34 - x^2)dy$$

där γ är den positivt orienterade randen till området $x^2 \leq y \leq \sqrt{x}$. Rita området!

6. Bestäm flödet av vektorfältet $\vec{F}$ ut genom den övre halvsfären $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z \geq 0$ (utan lock!) om

$$\vec{F}(x, y, z) = (z^5 + xy - x^2,\ e^z + y^2 - \sin x,\ 6z + x^2).$$

7. Låt $\vec{F}(x, y, z) = (x,\ x + y,\ x + y + z)$ och låt $\vec{r}(t) = (2\cos t,\ 2\sin t,\ 2)$ för $t \in [0,\ 2\pi]$ vara en parametrisering för kurvan γ. Beräkna $\oint_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$ på två sätt:

   a) med användning av Stokes sats,

   b) direkt från definitionen.

8. (**OBS**: bara ett av följande problem ska lösas, beroende på kursen som du har följt)

   (i) (**ODE**, kurs **1MA016** för **icke** KandMa1) Visa med en lämplig beräkning att följande differentialekvation är exakt och bestäm ekvationens lösningskurvor:

   $$(2x \sin y - y^2 \sin x)dx + (x^2 \cos y + 2y \cos x + 1)dy = 0.$$

   (ii) (**TOP**, kurs **1MA183**, bara för **KandMa1**) Låt

   $$f_n(x) = \frac{nx}{nx + 1}.$$

   Avgör om funktionsföljden konvergerar likformigt på:

   a) intervallet $[0, 1]$

   b) intervallet $[1, \infty]$.

   Kontrollera även om

   $$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx.$$

Lycka till!