1) $f(x,y) = x^3 + y^2 + 2xy - 4x - 3y + 5.$

a) Stat. punkter är punkter där gradienten är nollvektorn.

$$\boxed{\nabla f(x,y) = (3x^2 + 2y - 4,\ 2y + 2x - 3)}$$

Stationära punkter löser ES: $\begin{cases} 3x^2 + 2y - 4 = 0 \\ 2y + 2x - 3 = 0 \end{cases}$

Jämför $2y$ från båda ekv.: $4 - 3x^2 = 3 - 2x$

alltså $\boxed{3x^2 - 2x - 1 = 0}$ — lös ekv. m.h.a. pq-formeln eller kvadratkompl.:

$x_1 = -\frac{1}{3}$, $x_2 = 1$

Nu tar vi fram y: $y = -x + \frac{3}{2}$. Ger:

$y_1 = \frac{1}{3} + \frac{3}{2} = \frac{2+9}{6} = \frac{11}{6}$, $\quad y_2 = -1 + \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$

Två stationära punkter: $\left(-\frac{1}{3}, \frac{11}{6}\right)$, $\left(1, \frac{1}{2}\right)$.

För att bedöma deras karaktär, behöver vi Hessianen

$$\mathcal{H}_f(x,y) = \begin{bmatrix} f''_{xx}(x,y) & f''_{xy}(x,y) \\ f''_{yx}(x,y) & f''_{yy}(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6x & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$D_2 = 12x - 4 = 4(3x - 1)$

- $\left(-\frac{1}{3}, \frac{11}{6}\right)$ är $D_1 = -2 < 0$, $D_2 = -8 < 0 \Rightarrow$ Hessianen är indefinit, alltså har vi SADELPUNKT
- $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ är $D_1 = 6 > 0$, $D_2 = 8 > 0 \Rightarrow$ Hessianen är positivt definit, alltså har vi ett lokalt MINIMUM.

b) $\nabla f(1,0) = (-1, -1)$. Vi måste normera riktningen:

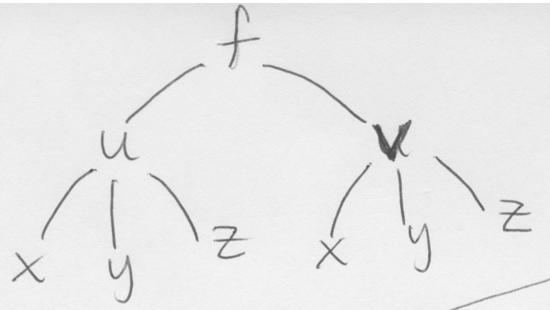
$\|3i + 4j\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$. Normerad riktning: $\vec{u} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$.

Riktningsderivatan $D_{\vec{u}} f(1,0) = \nabla f(1,0) \cdot \vec{u}$

$= (-1, -1) \cdot \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) = -\frac{3}{5} - \frac{4}{5} = -\frac{7}{5}$

Svar: Riktningsderivatan är lika med $-\frac{7}{5}$.

2)



$$h(x,y,z) = f\big(u(x,y,z),\, v(x,y,z)\big)$$

$$\begin{cases} u(x,y,z) = \dfrac{x}{y} \\ v(x,y,z) = \dfrac{y}{z} \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{1}{y}, \quad \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{x}{y^2}, \quad \dfrac{\partial u}{\partial z} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{1}{z}, \quad \dfrac{\partial v}{\partial z} = -\dfrac{y}{z^2} \end{array}}$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{y}\cdot\frac{\partial f}{\partial u} + 0\cdot\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{1}{y}\cdot\frac{\partial f}{\partial u}$$

$$\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{x}{y^2}\cdot\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{1}{z}\cdot\frac{\partial f}{\partial v}$$

$$\frac{\partial h}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial z} = 0\cdot\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{y}{z^2}\cdot\frac{\partial f}{\partial v} = -\frac{y}{z^2}\cdot\frac{\partial f}{\partial v}$$

Insättning ger:

$$x\cdot\frac{\partial h}{\partial x} + y\cdot\frac{\partial h}{\partial y} + z\cdot\frac{\partial h}{\partial z} = \cancel{\frac{x}{y}\cdot\frac{\partial f}{\partial u}} - \cancel{\frac{x}{y}\cdot\frac{\partial f}{\partial u}} + \cancel{\frac{y}{z}\cdot\frac{\partial f}{\partial v}} - \cancel{\frac{y}{z}\cdot\frac{\partial f}{\partial v}}$$

$$= 0$$

3) $f(x,y)=xy$, bivillkoret $g(x,y)=9x^2+4y^2-36=0$.

Enligt Lagranges metod, ett villkor för maximi- och minimipunkter (som existerar, eftersom ellipsen är en <u>kompakt</u> mängd och f är kontinuerlig) är

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) \parallel \nabla g(x,y) \\ g(x,y)=0 \end{cases} \iff \begin{cases} \begin{vmatrix} f'_x & f'_y \\ g'_x & g'_y \end{vmatrix} = 0 \\ g(x,y)=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \begin{vmatrix} y & x \\ 18x & 8y \end{vmatrix} = 0 \\ 9x^2+4y^2-36=0 \end{cases} \iff \begin{cases} 9x^2 = 4y^2 \\ 9x^2+4y^2-36=0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$18x^2=36 \iff x^2-2=0$$

$x_1=\sqrt{2}$ och $x_2=-\sqrt{2}$

$$\boxed{y^2=\frac{9}{4}x^2}$$

$y_{11}=\frac{3}{2}\sqrt{2}$ $\quad y_{12}=-\frac{3}{2}\sqrt{2}$ $\quad y_{21}=-\frac{3}{2}\sqrt{2}$ $\quad y_{22}=\frac{3}{2}\sqrt{2}$

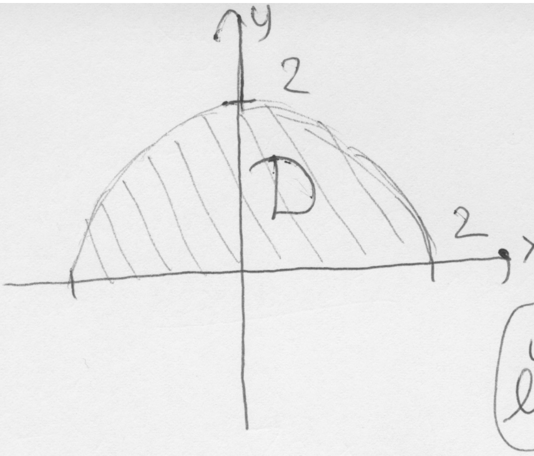
Det finns 4 extrempunkter på $g(x,y)=0$:

$$\left.\begin{array}{l} f(\sqrt{2},\frac{3}{2}\sqrt{2})=3 \\ f(-\sqrt{2},-\frac{3}{2}\sqrt{2})=3 \end{array}\right\} \text{två maximipunkter}$$

$$\left.\begin{array}{l} f(\sqrt{2},-\frac{3}{2}\sqrt{2})=-3 \\ f(-\sqrt{2},\frac{3}{2}\sqrt{2})=-3 \end{array}\right\} \text{två minimipunkter}$$

och svaret är att f:s minsta värdet på ellipsen är -3 och största 3.

4)



$$\iint_D (xy + x^2y + 5)\,dxdy$$

$$= \iint_D xy\,dxdy + \iint_D x^2y\,dxdy + \iint_D 5\,dxdy$$

integralens linjäritet

Man kan beräkna dessa tre integraler med tre olika metoder. Åtminstone! Det finns faktiskt många alternativa lösningssätt. Visar här de mest självklara val:

(1) $\iint_D xy\,dxdy = \mathbf{0}$ eftersom D är symmetrisk enligt y-axeln och integranden är udda m.a.p. x: $(-x)y = -xy$.

Alt: polär koordinatbyte eller Fubini

(2) $$\iint_D x^2y\,dxdy = \left[\begin{array}{l}\text{polär koord. b.}\\ x = r\cos\theta\\ y = r\sin\theta\\ dxdy = r\,dr\,d\theta\\ 0\le r\le 2,\ 0\le\theta\le\pi\end{array}\right] \int_0^2\int_0^\pi r^2\cos^2\theta\, r\sin\theta\, r\,d\theta\,dr =$$

$$= \int_0^2 r^4\,dr \cdot \int_0^\pi \cos^2\theta\sin\theta\,d\theta = \left[\frac{r^5}{5}\right]_0^2 \cdot \left[-\frac{\cos^3\theta}{3}\right]_0^\pi =$$

Fubini på en axelparallell rektangel och integranden $f(r)\cdot g(\theta)$

variabelbyte $\cos\theta = t$, $-\sin\theta\,d\theta = dt$

$$= \frac{32}{15}\cdot\left(-(-1)-(-1)\right) =$$

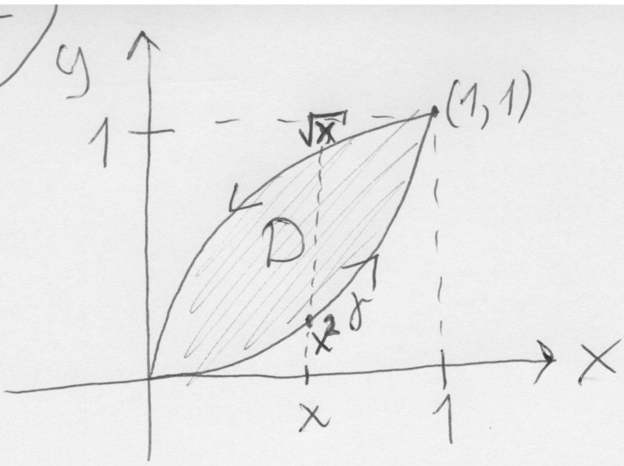
$$= \frac{64}{15}$$

Alt.: Fubini på ett x- eller y-enkelt område.

(3) $$\iint_D 5\,dxdy = 5\cdot(D\text{:s area}) = 5\cdot\frac{1}{2}\pi\cdot 2^2 = \mathbf{10\pi}$$

Svar: $$\iint_D (xy + x^2y + 5)\,dxdy = \boxed{\frac{64}{15} + 10\pi}$$

5)



Alla antaganden av Greens sats är uppfyllda
- kurvan är sluten, positivt orienterad
- området är y-enkelt
- fältet är C^∞ i hela $\mathbb{R}^2$

Greens sats ger:

$$\oint_\gamma P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy =$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = e^{x+y} - 1 \quad , \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = e^{x+y} - 2x$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1 - 2x$$

$$= \iint_D (1-2x)\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} (1-2x)\,dy \right) dx =$$

Fubini på ett y-enkelt område

$$= \int_0^1 \left[y - 2xy \right]_{y=x^2}^{y=\sqrt{x}} dx = \int_0^1 \left(\underbrace{\sqrt{x}}_{x^{\frac{1}{2}}} \underbrace{- 2x\sqrt{x}}_{2x^{\frac{3}{2}}} - x^2 + 2x^3 \right) dx =$$

$$= \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - 2 \cdot \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - \frac{x^3}{3} + 2 \cdot \frac{x^4}{4} \right]_0^1 =$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{4}{5} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{3} - \frac{4}{5} + \frac{1}{2} = \frac{10 - 24 + 15}{30} = \boxed{\frac{1}{30}}$$

6) Nästan alla antaganden i Gauss sats är uppfyllda. Fältet är C^∞ inuti hela halvklotet (t.o.m. i hela $\mathbb{R}^3$), halvklotet är ett regelbundet område och randen är styckvis C^1.

Bara ett antagande är <u>inte</u> uppfyllt och detta är att ytan inte är sluten. Vi kan dock "stänga" den och tillämpa Gauss sats på $S \cup L$ där S-halvsfären, L-locket $\{(x,y,0);\ x^2+y^2 \le a^2\}$. K-halvklotet $= \{(x,y,z);\ x^2+y^2+z^2 \le a^2,\ z \ge 0\}$.

Gauss sats ger

$$\iint_S \vec{F}\cdot\hat{N}\,dS + \iint_L \vec{F}\cdot\hat{N}\,dS = \oiint_{S\cup L} \vec{F}\cdot\hat{N}\,dS = \iiint_K \operatorname{div}\vec{F}\,dx\,dy\,dz$$

olika normalvektorfält, orienterade utåt ifrån K

Vi måste beräkna trippelintegralen och ytintegralen över L, och på slutet subtrahera dem ifrån varandra.

(1) $\operatorname{div}\vec{F} = \dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} + \dfrac{\partial R}{\partial z} = y - 2x + 2y + 6 = -2x + 3y + 6.$

$$\iiint_K (-2x+3y+6)\,dx\,dy\,dz \overset{\text{linjäritet}}{=} -2\cdot\iiint_K x\,dx\,dy\,dz + 3\cdot\iiint_K y\,dx\,dy\,dz + 6\cdot\iiint_K 1\,dx\,dy\,dz = \underbrace{0}_{\substack{\text{K symmetrisk enligt}\\ \text{yz-planet och int.}\\ \text{udda m.a.p. x}}} + \underbrace{0}_{\substack{\text{K sym. enligt}\\ \text{xz-planet och}\\ \text{int. udda m.a.p. y}}} + 6\cdot(\text{volym av } K) =$$

$$= 6\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi a^3 = \mathbf{4\pi a^3}$$

(2) $$\iint_L \vec{F}\cdot\hat{N}\,dS = \iint_{x^2+y^2\le a^2} \left(z^5+xy-x^2,\ e^z+y^2-\sin x,\ 6\underset{\text{z=0 på xy-planet}}{z}+x^2\right)\cdot(0,0,-1)\,dx\,dy$$

$$= \iint_{x^2+y^2\le a^2} -x^2\,dx\,dy = \left[\begin{array}{l}\text{polär koord. byte}\\ x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta\\ dx\,dy = r\,dr\,d\theta\\ 0\le\theta\le 2\pi,\ 0\le r\le a\end{array}\right] = \int_0^a\int_0^{2\pi} -r^2\cos^2\theta\, r\,d\theta\,dr \overset{\substack{\text{Fubini på}\\ \text{axelparallellt}\\ \text{rekt.}}}{=}$$

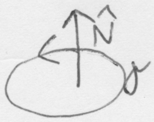
cosinus av dubbel vinkel

$$= -\int_0^a r^3\,dr\cdot\int_0^{2\pi}\frac{\cos 2\theta+1}{2}\,d\theta = -\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^a\cdot\left[\frac{1}{4}\sin 2\theta + \frac{1}{2}\theta\right]_0^{2\pi} = -\frac{a^4}{4}\pi$$

Svar: $\iint_S \vec{F}\cdot\hat{N}\,dS = \mathbf{4\pi a^3 + \frac{\pi a^4}{4}}$ ⟸

7) Kurvan γ är cirkeln med radien 2 och mittpunkten $(0,0,2)$ i planet $z=2$.

a) Stokes sats omvandlar kurvintegralen mot ytintegralen över (i det här fallet) t.ex. cirkelskivan (D) med radien 2 och mittpunkten $(0,0,2)$ i pl. $z=2$, av fältets rotation.



$$\text{rot}\,\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & x+y & x+y+z \end{vmatrix} = (1,-1,1)$$

$$\oint_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_D \text{rot}\,\vec{F}\,\underbrace{d\vec{S}}_{\substack{\hat{N}dS \\ \hat{N}=(0,0,1)}} = \iint_{x^2+y^2\le 4} (1,-1,1)\cdot(0,0,1)\,dx\,dy =$$

$$= \iint_{x^2+y^2\le 4} 1\,dx\,dy = \text{Arean}(D) = \boxed{4\pi}$$

b) Direkt från definitionen

$\vec{r}(t) = (2\cos t, 2\sin t, 2)$ $\quad t\in[0,2\pi]$

$\vec{r}\,'(t) = (-2\sin t, 2\cos t, 0)$

$$\oint_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \vec{F}(\vec{r}(t))\cdot\vec{r}\,'(t)\,dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} (2\cos t, 2\cos t+2\sin t, 2\cos t+2\sin t+2)\cdot(-2\sin t, 2\cos t, 0)\,dt$$

$$\underset{\text{skalärprodukt}}{=} \int_0^{2\pi} (\cancel{-4\sin t\cos t} + 4\cos^2 t + \cancel{4\sin t\cos t})\,dt =$$

$$\underset{\substack{\text{cosinus} \\ \text{av} \\ \text{dubbelvinkel}}}{=} 4\cdot\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2t+1}{2}\,dt = 4\cdot\left[\frac{1}{4}\sin 2t + \frac{1}{2}t\right]_0^{2\pi} =$$

$$= 4\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\pi = \boxed{4\pi}$$

samma resultat.

8 ODE

Kollar om ekvationen är exakt:

$$\underbrace{(2x\sin y - y^2\sin x)}_{P(x,y)}dx + (\underbrace{x^2\cos y + 2y\cos x + 1}_{Q(x,y)})dy = 0$$

för detta behövs att $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$.

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial x} &= 2x\cos y - 2y\sin x \\ \frac{\partial P}{\partial y} &= 2x\cos y - 2y\sin x \end{aligned}\right\} \text{lika.}$$

Lösningskurvor till ODE:n är nivåkurvorna till en potential till $\vec{F} = (P, Q)$.

Bestämmer en potential $\Phi = \Phi(x,y)$, alltså en funktion $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ som uppfyller:

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 2x\sin y - y^2\sin x \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} = x^2\cos y + 2y\cos x + 1 \end{cases} \Rightarrow \Phi(x,y) = x^2\sin y + y^2\cos x + \varphi(y)$$

$$x^2\cos y + 2y\cos x + 1 = \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2\sin y + y^2\cos x + \varphi(y)\right) =$$

$$= x^2\cos y + 2y\cos x + \varphi'(y)$$

$$\varphi'(y) = 1 \Rightarrow \varphi(y) = y + C$$

Varje potential har formen $\Phi(x,y) = x^2\sin y + y^2\cos x + y + C$

Svar: Alla lösningskurvor har ekvationer

$$\boxed{x^2\sin y + y^2\cos x + y = C, \quad C \in \mathbb{R}}$$

8 TOP

Vi börjar med att hitta (punktvis) gränsfunktion.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{nx}{nx+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{x+\frac{1}{n}} = \begin{cases} 1, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} = f(x)$$

$$f_n \xrightarrow{(p)} f$$

a) eftersom $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ enligt formeln ovan inte är kontinuerlig, kan <u>inte konvergensen vara likformig</u> (se satsen: $f_n \to f$ likformigt på D och f_n kont. för varje n, då måste f vara kontinuerlig)

b) Om $x \in [1, +\infty)$:

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{nx}{nx+1} - \underbrace{\frac{nx+1}{nx+1}}_{=1} \right| = \frac{1}{nx+1} \overset{x\geq 1}{\leq} \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

$$\Downarrow$$

$$\sup_{x\in[1,+\infty)} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

vilket betyder att konvergensen <u>är</u> likformig.

<u>Integrering</u>

HL: $\int_0^1 1\,dx = 1.$

VL: $\int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 \frac{nx}{nx+1}\,dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{nx+1}\right) dx =$

$$= 1 - \int_0^1 \frac{1}{nx+1}\,dx = 1 - \left[\frac{1}{n}\ln(nx+1)\right]_0^1 =$$

$$= 1 - \frac{1}{n}\ln(n+1) \xrightarrow{n\to\infty} 1$$

standardgränsvärde i ∞

Likheten stämmer alltså (trots att konvergensen inte är likformig)