UPPSALA UNIVERSITET Tentamen 3 Juni 2019
Matematiska institutionen 1MA016 FLERVARIABELANALYS

Skrivtid: 8 - 13. Tillåtna hjälpmedel: Papper, penna, radergummi, linjal. Varje uppgift ger som mest 5 poäng. Tydliga motiveringar krävs för full poäng.

1. Låt $f(x, y) = xy^2 + yx^2 - x$. Bestäm alla stationära punkter till f och avgör om de är sadelpunkter, lokala maxima eller lokala minima.

2. Finn det största och minsta värdet av $f(x, y) = x^2 - y^3$ på enhetsskivan $x^2 + y^2 \leq 1$.

3. Visa att variabelbytet $u = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - y)$, $v = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y)$ transformerar Laplace ekvation $\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0$ till Laplace ekvation $\frac{\partial^2\phi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial v^2} = 0$.

4. Begrunda ekvationen $E : xyz + x^2y^3 = 2$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

(a) Ange den linjära ekvation som ger den bästa approximationen till E i närheten av $(1, 1, 1)$.

(b) Avgör vilka av variablerna som är funktioner av de andra ($x = x(y, z)$, $y = y(x, z)$ och/eller $z = z(x, y)$) i närheten av $(1, 1, 1)$ på lösningsmängden till E.

5. Beräkna dubbelintegralen $\iint_D (x^2+y^2-2y)\, dxdy$ där $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, (x-1)^2+y^2 \leq 1\}$.

6. Betrakta vektorfältet $\mathbf{F}(x, y, z) = (xz^2, x^2y, y^2z - 1)$.

(a) Beräkna flödet av $\mathbf{F}$ ut ur halvklotet $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 \leq 4,\ z \geq 0\}$.

(b) Längs vilken del av randytan är utflödet som störst, genom halvsfären eller genom bottenplattan?

7. Betrakta vektorfältet $\mathbf{F}(x, y, z) = (\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, z^2)$. Låt C vara skärningskurvan mellan ytorna $z = 1 + y^2$ och $x^2 + y^2 = 4$ orienterad moturs sett från högt upp på z-axeln.

(a) Visa att $\nabla \times \mathbf{F} = 0$.

(b) Visa att $\int_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = 2\pi$.

8. Ange den allmänna lösningen $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ till följande system av ordinära differentialekvationer:

$$x' = 2x + y$$
$$y' = x + 2y$$