UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska Institutionen

INDIVIDUELL Tentamen i matematik
Flervariabelanalys M 1MA183
2021-Mars–30

Tillåtna hjälpmedel: kursbok, egna anteckningar. Det maximala poängtalet för varje uppgift är 5 poäng. För betygen 3, 4, 5 krävs minst 18, 25 resp. 32 poäng. Alla svar ska motiveras med lämpliga beräkningar eller med en hänvisning till lämplig teori.

1. Avgör om gränsvärdet
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x)\sin(y)}{(1-\cos(x^2+y^2))\cos(x+y)}$$
existerar och beräkna det i förekommande fall.

2. Beräkna de första partiella derivatorna till
$$f(x,y,z) = x^{(y^2)^{(z^3)}},\ x,y,z>0.$$

3. Ekvationen $y^5 + x^4y^4 + x^2y^2 + x - 4 = 0$ satisfieras av punkten $(1,1)$. Är x i en omgivning av denna punkt en entydig funktion av y?

4. Beräkna $\frac{\partial^{20} f}{\partial x^{10}\partial y^{10}}$ för $x = y = 0$ då $f(x,y) = e^{x+y}$.

5. Funktionen f definieras genom $f(x,y,z) = xy^2$. Låt D vara området $x^2+y^2+9z^2 \leq 1$. Bestäm $\sup f(x,y,z)$ och $\inf f(x,y,z)$ då $(x,y,z) \in D$.

6. Bestäm om dubbelintegralen
$$\iint_D \frac{1}{(x^2+y^2)^{\frac{k}{2}}}\,dx\,dy$$
existerar och beräkna den i förekommande fall, där k är ett positivt heltal och D är området för alla punkter $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ sådan att $x^2 + y^2 \leq 25$.

7. Beräkna linjeintegralen

$$\int_C \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy$$

där C är den positivt orienterade fyrhörning som i orndning sammanbinder punterna $(1,0),(0,1),(0,3)$ och $(3,0)$.

Vad skulle hända om C vare den positivt orienterade fyrhörning som i orndning sammanbinder punterna $(1,0),(0,1),(-1,0)$ och $(0,-1)$?

8. Bestäm det största och minsta värde, som kan antagas av volymen till en rätvinklig parallellepiped, sådan att summan av de sex sidoytorna är 10 och summan av de tolv kantlinjerna är 16.

May the Math be with you.