UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska Institutionen

Tentamen i matematik
Flervariabelanalys M 1MA183
2021-Juni

Tillåtna hjälpmedel: kursbok, egna anteckningar. Det maximala poängtalet för varje uppgift är 5 poäng. För betygen 3, 4, 5 krävs minst 18, 25 resp. 32 poäng. Alla svar ska motiveras med lämpliga beräkningar eller med en hänvisning till lämplig teori.

1. Beräkna största och minsta avstånd till origo från kurvan
$$x^3 + y^3 - 1 = 0.$$

2. Hur stor del av volymen mellan
$$z = 10 - x^2 - y^2 \text{ och } z = 3x^2 + 3y^2 - 10$$
ligger över xy-planet.

3. Transformera differentialuttrycket
$$x^2 \frac{\partial f}{\partial x} + xy \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$
genom att införa nya variabler u och v definierade genom
$$u = x + y, v = x - y.$$

4. Visa att det finns ingen sluten kurva med parametrisering $r(t) = (x(t), y(t))$ sådan att
$$\begin{cases} x'(t) & = & P(x(t), y(t)) \\ y'(t) & = & Q(x(t), y(t)) \end{cases}$$
där $(P(x, y), Q(x, y)) = (x + e^{\sin(y^2)}, y + \cos(\sin(x)))$.

5. Avgör om gränsvärdet
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x)\cos(y)}{1 - e^{5(x^2+y^2)}}$$
existerar och beräkna det i förekommande fall.

6. Beräkna
$$\iiint_K x dx dy dz$$
där $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0, y > 0, x^2 + y^2 < z < 2\}$.

7. Beräkna
$$\int_\gamma -y^3 dx + x^3 dy - z^3 dz,$$
där γ beteckna skärningen mellan ytan $x^2+y^2 = 1$ och planet $x + y + z = 1$, och är en kurva som löper ett varv runt $z-$axeln i positiv led.

8. Visa att $f(x, y) = (\sin(x^{2020} + y^{2020}))^2$ har ett minimum i origo.

May the Math be with you.