UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska Institutionen

Tentamen i matematik
Flervariabelanalys M 1MA183
2021-Augusti

Tillåtna hjälpmedel: kursbok, egna anteckningar. Det maximala poängtalet för varje uppgift är 5 poäng. För betygen 3, 4, 5 krävs minst 18, 25 resp. 32 poäng. Alla svar ska motiveras med lämpliga beräkningar eller med en hänvisning till lämplig teori.

1. Avgör om gränsvärdet
$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{2x^2y\sin(z)}{(x^2+y^2)^2}$$
existerar och beräkna det i förekommande fall.

2. Sök största och minsta värdet av funktionen $f(x,y,z) = x+y-z$ då $x^2+y^2+z^2 \leq 1$.

3. Beräkna
$$\iint_D y^3(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}\,dxdy,$$
där D är området $\frac{1}{2} \leq y \leq 1$ och $x^2+y^2 \leq 1$.

4. Bestäm värdet av linjeintegralen
$$\int_C (x^2y + \frac{1}{3}y^3 + ye^{xy})dx + (x + xe^{xy})dy$$
från punkten $(1,0)$ till $(-1,0)$ längs den i övre halvplanet belägna delen av cirkeln $x^2+y^2=1$.

5. Sätt
$$f(x,y) = \frac{e^{xy}(\cos x - y\sin x) - 1}{x^2}$$
för $x \neq 0$. Visa att man kan bestämma $f(0,y)$ så att $f(x,y)$ blir kontinuerlig i hela planet.

6. Visa att om $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ satisfieras av funktionen $u = v$, så satisfieras den också av funktionen $u = x\dfrac{\partial v}{\partial x} + y\dfrac{\partial v}{\partial y}$. Funktionen v förutsättes ha kontinuerliga partiella derivator upp till ordning 3.

7. Visa att funktionen $f(x, y) = \dfrac{x + y}{1 + 2x^2 + 2y^2}$ är begränsad för alla x och y och angiv dess övre och undre gränser.

8. Antag att vi har ett vätskeflöde som beskrivs av fältet $F = (-y - 1, y, x^2 + z)$. Beräkna det totala flödet ut från kroppen K i rummet som ges av

$$0 \leq x \leq 1 - 2y^2 - 2z^2.$$

May the Math be with you.