UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska Institutionen

Tentamen i matematik
Flervariabelanalys M 1MA183
2022-April

Tillåtna hjälpmedel: kursbok, egna anteckningar. För betygen 3, 4, 5 krävs minst 18, 25 resp. 32 poäng. Alla svar ska motiveras med lämpliga beräkningar eller med en hänvisning till lämplig teori.

1. Betrakta funktionen $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x-y)^2} \text{ om } (x,y) \neq (0,0);\ \ f(0,0) = 1.$$

   (a) *(5 poäng)* Är f kontinuerlig i origo?

   (b) *(5 poäng)* Visa att f är begränsad, den har en maximipunkt på mängden $x^2+y^2=1$, och hitta den.

2. *(5 poäng)* Beräkna

$$\iint_A e^{-(x^2+y^2+xy)}dxdy,$$

   där $A = \{(x,y) : x^2+y^2+xy \leq 1\}$.

3. *(5 poäng)* Bestäm värdet av linjeintegralen

$$\int_C (x^2y + \frac{1}{3}y^3 + y\sin(e^{xy}))dx + (x + x\sin(e^{xy}))dy$$

   från punkten $(-2,0)$ till $(2,0)$ längs den i övre halvplanet belägna delen av cirkeln $x^2+y^2=4$.

4. *(5 poäng)* Funktionerna f, g och h uppfyller

$$\begin{cases} \partial_x f + \partial_y g &= 0 \\ \partial_x g + \partial_y h &= 0 \end{cases}$$

   $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Bevisa att det finns en funktion $\varphi(x,y)$, sådan att

$$\partial_{xx}\varphi = h, \partial_{xy}\varphi = -g, \partial_{yy}\varphi = f.$$

   [Tips: Visa att $(h,-g)$ är konservativ (U), $(-g,f)$ är konservativ (V), och att (U,V) är konservativ (φ).]

5. *(5 poäng)* Transformera differentialekvationen

$$x^2\partial_{xx}f + 2xy\partial_{xy}f + y^2\partial_{yy}f = xy$$

genom att införa de nya variablerna $u = x, v = \frac{x}{y}$.

6. *(5 poäng)* Bestäm konstanten c så att planet $2x + 2y + z = c$ tangerar ytan $x + y^2 + z^4 = 1$.

7. *(5 poäng)* Beräkna flödet av fältet $\mathbf{F} = (-2xy, yz, x+y)$, ut från kropp K som begränsas av planet $z = 2$ och konen $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

May the Math be with you.