UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
W. Staubach
2012-12-18

Tentamen i Fourieranalys 5p
1MA211
Kandfy, Kandma, F, mfl.

Skrivtid: 08:00–13:00. Antal problem 8 samt 3 sidor formelsamling. Varje uppgift är värd högst 5 poäng. Lösningarna skall vara försedda med kortfattade förklaringar. Inga räknedosor tillåtna men man får använda formelsamlingen som delas ut i samband med denna tentamen.

1. Funktionen f är 2π-periodisk och $f(x) = x^2$ för $-\pi \leq x \leq \pi$
   (a) Bestäm funktionens Fourierserie (denna skall ges på exponensiell dvs komplex form, och detaljer som leder till denna Fourierutveckling skall redovisas).
   (b) Beräkna summan $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$.
2. Beräkna faltningen $(f * f)(x)$ där $f(x) = e^{-|x|}$ genom att använda Fouriertransformen. Svaret skall ges explicit, dvs en integralrepresentation av lösningen är ej tillräcklig för full poäng.
3. Bestäm en funktion $f \in L^1(\mathbb{R})$ sådan att
$$f(x) + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-y|} f(y)\, dy = e^{-|x|}.$$
   Svaret skall ges explicit, dvs en integralrepresentation av lösningen är ej tillräcklig för full poäng.
4. Lös med variabelseparation ekvationen $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2u$, som gäller då $t > 0$ och $0 < x < 1$, med rand- och begynnelsevillkoren $u(0,t) = u(1,t) = 0$ för $t > 0$ och $u(x,0) = x$ för $0 < x < 1$.
5. Med hjälp av Fouriertransform i lämplig variabel, finn en lösning $u(x,y)$ till ekvationen $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + 2yu = 0$, $y > 0$, med begynnelsevillkoret $u(x,0) = f(x) \in L^1(\mathbb{R})$.
6. Lös med hjälp av Laplacetransformen differentialekvationen $y(x)'' - y(x)' - 2y(x) = 2$, $x \geq 0$, med begynnelsevillkoren $y(0) = y'(0) = 1$.
7. Låt $f \in L^1(\mathbb{T})$ och $S_N(f)$ beteckna den N-te partialsumman av Fourierserien till f, dvs $S_N(f)(x) = \sum_{k=-N}^{N} \hat{f}(k) e^{ikx}$. Visa att
$$\|S_N(f)\|_{L^1(\mathbb{T})} \leq \frac{2N+1}{2\pi} \|f\|_{L^1(\mathbb{T})},$$
   där vi använder $\int_{-\pi}^{\pi} |u(t)|\, dt$ som definition av $L^1(\mathbb{T})$-normen. Ledning: Använd representationen av $S_N(f)$ genom Dirichletkärnan.
8. Låt $\psi(x)$ vara en reellvärd kontinerligt deriverbar funktion sådan att $|\hat{\psi}(\xi)| \leq \frac{A|\xi|}{(1+|\xi|)^2}$, för alla $\xi \in \mathbb{R}$ och en konstant $A > 0$. Definiera nu operatorn $Q_t(f)(x) := \frac{1}{t} \int_{\mathbb{R}} \psi(\frac{x-y}{t}) f(y)\, dy$. Visa att
$$\int_0^{\infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{|Q_t(f)(x)|^2}{t}\, dx\, dt \leq B \|f\|^2_{L^2(\mathbb{R})},$$
   där B är en positiv konstant. Observera att det är varibeln t som integreras mellan 0 och ∞. Ledning: Använd Plancherels formel.