5) $t_n = \#$ torn

$b_n = \#$ torn som slutar med plast (Bob)

$a_n = \#$ torn som slutar med trä (Alice)

$t_n = a_n + b_n$ (1)

$a_n = 2b_{n-1}$ (för Alice placerar en bricka efter Bob) (2)

$b_n = 4t_{n-1}$ (för Bob placerar bricker som helst) (3)

$t_n = 2b_{n-1} + 4t_{n-1}$ av (1), (2) och (3)

$\Rightarrow t_n = 8t_{n-2} + 4t_{n-1}$ av (3)

$t_n - 4t_{n-1} - 8t_{n-2} = 0 \Rightarrow$ karakteristisk ekvation: $\lambda^2 - 4\lambda - 8 = 0$

$(\lambda-2)^2 - 4 - 8 = 0$

$\lambda = 2 \pm \sqrt{12}$

Begynnelse villkor: $t_1 = 2$ (Alice börjar)

$t_2 = 2 \cdot 4 = 8$ (Bob)

t_0 kan beräknas: $8 - 8 - 8t_0 = 0 \Rightarrow t_0 = 0$

Så $t_n = A(2+\sqrt{12})^n + B(2-\sqrt{12})^n$ och

$$\left.\begin{aligned} 0 &= A + B \Rightarrow B = -A \quad (4)\\ 2 &= A(2+\sqrt{12}) + B(2-\sqrt{12}) \quad (5) \end{aligned}\right\}$$

$\Rightarrow 2 = A(2+\sqrt{12}) - A(2-\sqrt{12})$ av (4) och (5)

$\Rightarrow 2 = 2\sqrt{12}\,A \Rightarrow A = 1/\sqrt{12}$ och $B = -\frac{1}{\sqrt{12}}$

Anm.
Begynnelse villkor $t_0 = 1$, $t_1 = 2$ är acceptabla och ger $A = \frac{1}{2}$ $B = \frac{1}{2}$

__Svar:__ $a_{20} = \frac{1}{\sqrt{12}}(2+\sqrt{12})^{20} - \frac{1}{\sqrt{12}}(2-\sqrt{12})^{20}$

6) a) $\dfrac{12!}{3!\,3!\,3!\,3!}$

b) Vi söker $|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4|$ där $A_1 = \{aaa \text{ finns i ordet}\}$
$A_2 = \{bbb \text{ finns i ordet}\}$
$A_3 = \{ccc \text{ finns i ordet}\}$
$A_4 = \{ddd \text{ finns i ordet}\}$

$$|A_i| = \frac{(12-3+1)!}{3!\,3!\,3!} = \frac{10!}{3!\,3!\,3!}$$

$$|A_i \cap A_j| = \frac{(12-6+2)!}{3!\,3!} = \frac{8!}{3!\,3!}$$

$$|A_i \cap A_j \cap A_k| = \frac{(12-9+3)!}{3!} = \frac{6!}{3!}$$

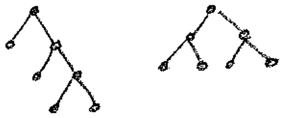
$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 4!$$

Av <u>sållprincipen</u> $|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = \binom{4}{1}\frac{10!}{3!\,3!\,3!} - \binom{4}{2}\frac{8!}{3!\,3!} + \binom{4}{3}\frac{6!}{3!} - \binom{4}{4}4!$

$$= 4 \cdot \frac{10!}{(3!)^3} - 6\,\frac{8!}{(3!)^2} + 4\,\frac{6!}{(3!)^1} - 4! \quad (=60936)$$

c) Det finns som mest 6 <u>olika</u> bokstäver i basordet, så det finns som mest $6!$ förkortningar. $6! = 720$. Om 721 ord i X väljs slumpmässigt, då måste minst 2 ha samma förkortningen av <u>lådprincipen</u>.

7) a)



b) # träd ges av Catalantalet $C_n = C_0C_{n-1} + C_1C_{n-2} + \dots + C_{n-1}C_0$

$$\Rightarrow \quad C_6 = 1\cdot 42 + 1\cdot 14 + 2\cdot 5 + 5\cdot 2 + 14\cdot 1 + 42\cdot 1$$
$$= 84 + 28 + 20$$
$$= 132$$

c)
$$f(t) = \frac{1}{2t}\left(1-(1-4t)^{1/2}\right)$$
$$= \frac{1}{2t}\Big(1 - \sum_{n\geq 0}\binom{1/2}{n}(-4)^n t^n\Big)$$
$$= -\frac{1}{2t}\sum_{n\geq 1}\binom{1/2}{n}(-4)^n t^n$$
$$= -\frac{1}{2}\sum_{n\geq 1}\binom{1/2}{n}(-4)^n t^{n-1}$$
$$= -\frac{1}{2}\sum_{n\geq 0}\binom{1/2}{n+1}(-4)^{n+1} t^n$$

Så $C_n = -\frac{1}{2}\binom{1/2}{n+1}(-4)^{n+1}$

är en acceptabel formel som ger C_n.

<u>eller</u> $C_n = C_0C_{n-1} + C_1C_{n-2} + \dots + C_{n-1}C_0$

Om $f(t) = \sum_{n\geq 0} C_n t^n$

C_n är koeff. av t^{n-1} i Cauchy produkten $f(t)^2$

$\Rightarrow C_n$ " " " t^n i " " $tf(t)^2$

Det kan skrivas
$$[t^n]f(t) = [t^n]\,tf(t)^2$$
som gäller om $n \geq 1$

Om $n = 0$ $\quad [t^0]f(t) = C_0 = 1$

men $\quad [t^0]\,tf(t)^2 = 0$

Så $f(t) = 1 + tf(t)^2$

Med hjälp av kvadratkomplettering:
$$f(t) = \frac{1}{2t}\left(1-\sqrt{1-4t}\right)$$