UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Styf 0707-253107

Prov i matematik
för programmen
ES, KandFy, Q, X
Linjär algebra II
2011–10–20

Skrivtid: 8.00 – 13.00. Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon. Lösningarna skall vara försedda med utförliga motiveringar. Varje korrekt löst uppgift ger 5 poäng. För betygen 3, 4, 5 krävs minst 18, 25 respektive 32 poäng.

1. Delrummet M till $\mathcal{P}_3$ (polynomen av grad högst tre) spänns upp av $1+t^2+t^3$, $1+t$, $1-t+2t^2+2t^3$, $1+t+t^2$. Bestäm en bas i M bland dessa polynom och utvidga den funna basen till en bas i $\mathcal{P}_3$.

2. Låt M vara delrummet till $\mathbb{E}^4$ som består av alla vektorer som är vinkelräta mot vektorn $(1,1,-1,-1)^t$. Bestäm en ON-bas i M och skriv vektorn $\mathbf{u} = (0,0,1,0)^t$ som en summa $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$ där $\mathbf{u}_1 \in M$ och $\mathbf{u}_2 \in M^\perp$. Bestäm avståndet från $\mathbf{u}$ till $M^\perp$.

3. Den linjära operatorn F på $\mathbb{E}^3$ ges geometriskt som den ortogonala projektionen på planet $x+y-2z=0$.

(a) Bestäm F:s standardmatris.

(b) Bestäm F:s nollrum och värderum.

4. Lös följande system av differentialekvationer

$$\begin{cases} y_1'(t) = 4y_1(t) - y_2(t) \\ y_2'(t) = 6y_1(t) - y_2(t) \end{cases}$$

där $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = 4$.

5. Bestäm alla värden på den reella konstanten a, för vilka ekvationen

$$2xy + 2xz + 2yz - x^2 - y^2 - z^2 = a$$

beskriver en enmantlad rotationshyperboloid. Bestäm i dessa fall även rotationsaxelns riktning i xyz-systemet, samt minsta avståndet från ytan till origo.

6. Låt $\mathbb{R}_s^{(2,2)}$ beteckna rummet av alla symmetriska 2×2-matriser. En linjär operator F på $\mathbb{R}_s^{(2,2)}$ definieras genom

$$F(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 & x_2 + x_3 \\ x_2 + x_3 & x_2 + x_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 & x_3 \\ x_3 & x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_s^{(2,2)}$$

Bestäm matrisen för F i någon bas och avgör om F är diagonaliserbar.

7. Antag att V, W är vektorrum och att $\underline{e}$ är en bas i V, medan $\underline{f}$ är en bas W. För den linjära avbildningen $F : V \to W$ gäller att

$$[F]_{fe} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Finn, om det är möjligt, baser, $\underline{b}$ i V och $\underline{c}$ i W, sådana att

$$[F]_{cb} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ange även baser i F:s noll- och värderum ($N(F)$ respektive $V(F)$).

8. $\mathbb{R}^2$ förses med en skalärprodukt $\langle -, - \rangle$, sådan att

$$\underline{b} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$$

utgör en ON-bas. Bestäm maximum av

$$-17\,x_1 + 7\,x_2 \quad \text{då} \quad \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 1.$$

Ange även alla vektorer $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^t$, för vilka maximum antas.