UPPSALA UNIVERSITET
MATEMATISKA INSTITUTIONEN
Bo Styf

Linjär algebra II
ES, KandFy, Q, X

Svr till tentamen i linjär algebra II, 2011–10–20

1. Delrummet M till $\mathcal{P}_3$ (polynomen av grad högst tre) spänns upp av $p_1 = 1 + t^2 + t^3$, $p_2 = 1 + t$, $p_3 = 1 - t + 2t^2 + 2t^3$, $p_4 = 1 + t + t^2$. Bestäm en bas i M bland dessa polynom och utvidga den funna basen till en bas i $\mathcal{P}_3$.

Svar. Vi bildar en matris med koordinatvektorerna för $p_1, \ldots, p_4$, med avseende på standardbasen i $\mathcal{P}_3$, som kolonner och gör radoperationer:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Av den högra matrisen framgår att (p_1, p_2, p_4) utgör en bas i M. För att utvidga till en bas i $\mathcal{P}_3$ behöver vi hitta en vektor som inte ligger i M. Vi gissar att polynomet 1 är en sådan vektor (t, t^2, t^3 går också bra). Eftersom

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

är $(p_1, p_2, p_4, 1)$ linjärt oberoende och därför en bas i $\mathcal{P}_3$. $\square$

2. Låt M vara delrummet till $\mathbb{E}^4$ som består av alla vektorer som är vinkelräta mot vektorn $(1, 1, -1, -1)^t$. Bestäm en ON-bas i M och skriv vektorn $\mathbf{u} = (0, 0, 1, 0)^t$ som en summa $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$ där $\mathbf{u}_1 \in M$ och $\mathbf{u}_2 \in M^\perp$. Bestäm avståndet från $\mathbf{u}$ till $M^\perp$.

Svar. En vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^t$ är vinkelrät mot $\mathbf{b}_4 = (1, 1, -1, -1)^t$ om och endast om

$$0 = x_1 + x_2 - x_3 - x_4. \qquad (*)$$

Tre vektorer som uppfyller $(*)$ och dessutom är vinkelräta mot varandra är

$$\mathbf{b}_1 = (1, 1, 1, 1)^t \qquad \mathbf{b}_2 = (1, -1, 0, 0)^t \qquad \mathbf{b}_3 = (0, 0, 1, -1)^t$$

Eftersom M är tredimensionellt utgör $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$ en ortogonalbas i M. En ON-bas i M är $(\mathbf{b}_1/2, \mathbf{b}_2/\sqrt{2}, \mathbf{b}_3/\sqrt{2})$. En ortogonalbas i $M^\perp$ är $(\mathbf{b}_4)$.

Projektionsformeln ger

$$\mathbf{u}_2 = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{b}_4}{\mathbf{b}_4\cdot\mathbf{b}_4}\,\mathbf{b}_4 = \frac{-1}{4}\,\mathbf{b}_4 = \frac{1}{4}\,(-1, -1, 1, 1)^t$$

Det följer att

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{u} - \mathbf{u}_2 = \frac{1}{4}(0,0,4,0)^t - \frac{1}{4}(-1,-1,1,1)^t = \frac{1}{4}(1,1,3,-1)^t$$

Avståndet från $\mathbf{u}$ till $M^\perp$ är $|\mathbf{u}_1| = \frac{1}{4}\sqrt{12} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$. $\square$

3. Den linjära operatorn F på $\mathbb{E}^3$ ges geometriskt som den ortogonala projektionen på planet $x + y - 2z = 0$.

(a) Bestäm F:s standardmatris.

(b) Bestäm F:s nollrum och värderum.

Svar. Planets normal är $\mathbf{n} = (1,1,-2)^t$. Standardmatrisen för den ortogonala projektionen längs $\mathbf{n}$ är

$$Q = \frac{1}{\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}}\left(\mathbf{n}\,\mathbf{n}^t\right) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}(1,\ 1,\ -2) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Standardmatrisen P för den ortogonala projektionen på planet $x + y - 2z = 0$ är därför

$$P = I - Q = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} - \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Nollrummet består av alla vektorer parallella med $\mathbf{n}$ och värderummet består av alla vektorer vinkelräta mot $\mathbf{n}$. $\square$

4. Lös följande system av differentialekvationer

$$\begin{cases} y_1'(t) = 4y_1(t) - y_2(t) \\ y_2'(t) = 6y_1(t) - y_2(t) \end{cases}$$

där $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = 4$.

Svar.

$$y_1(t) = 2e^t - e^{2t}, \qquad y_2(t) = 6e^t - 2e^{2t}$$

$\square$

5. Bestäm alla värden på den reella konstanten a, för vilka ekvationen

$$2xy + 2xz + 2yz - x^2 - y^2 - z^2 = a$$

beskriver en enmantlad rotationshyperboloid. Bestäm i dessa fall även rotationsaxelns riktning i xyz-systemet, samt minsta avståndet från ytan till origo.

Svar. Den kvadratiska formen i vänsterledet har matrisen

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Egenvärdena till A ges av

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1-\lambda & -1-\lambda & 1 \\ 1-\lambda & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \\ &= (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \\ &= (1-\lambda)(-2-\lambda)^2 \end{aligned}$$

Egenvärdena är alltså $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$ och $\lambda_3 = 1$. Ytan är en rotationsyta ty λ_1 har algebraisk multiplicitet två. Ytans ekvation i principalkoordinaterna är $-2\tilde{x}^2 - 2\tilde{y}^2 + \tilde{z}^2 = a$, som kan skrivas $2\tilde{x}^2 + 2\tilde{y}^2 - \tilde{z}^2 = -a$. Det betyder att ytan är en enmantlad hyperboloid om och endast om $a < 0$. Avståndet till origo är $\sqrt{-a/2}$.

Egenvektorerna till egenvärdet $\lambda_{1,2} = -2$ ges av det på matrisform skrivna ekvationssystemet

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ ges alltså av ekvationen $x + y + z = 0$. Då $\mathbf{v}_3$ är vinkelrät mot $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ måste den vara parallell med $(1,1,1)$. Rotationsaxeln är därför den räta linjen med ekvationen $(x,y,z) = t(1,1,1)$. $\square$

6. Låt $\mathbb{R}_s^{(2,2)}$ beteckna rummet av alla symmetriska 2×2-matriser. En linjär operator F på $\mathbb{R}_s^{(2,2)}$ definieras genom

$$F(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 & x_2 + x_3 \\ x_2 + x_3 & x_2 + x_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 & x_3 \\ x_3 & x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_s^{(2,2)}$$

Bestäm matrisen för F i någon bas och avgör om F är diagonaliserbar.

Svar. Standardmatrisen för F är

$$A = [F] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Egenvärdena till F ges av

$$0 = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)(0-\lambda)$$

Alltså har vi $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 0$. Distinkta egenvärden medför att F är diagonaliserbar. $\square$

7. Antag att V, W är vektorrum och att $\underline{e}$ är en bas i V, medan $\underline{f}$ är en bas W. För den linjära avbildningen $F : V \to W$ gäller att

$$A = [F]_{fe} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Finn, om det är möjligt, baser, $\underline{b}$ i V och $\underline{c}$ i W, sådana att

$$[F]_{cb} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ange även baser i F:s noll- och värderum ($N(F)$ respektive $V(F)$).

Svar. $N(F)$ och $V(F)$ ges av det på matrisform skrivna ekvationssystemet

$$(A \mid \vec{0}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Av den högra matrisen framgår att $F(\mathbf{e}_1) = \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_3$ och $F(\mathbf{e}_4) = \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 + 2\mathbf{f}_3$ bildar en bas i $V(F)$, medan $\mathbf{b}_3 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ och $\mathbf{b}_4 = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3$ bildar en bas i $N(F)$. Om vi väljer $\mathbf{b}_1 = \mathbf{e}_1$, $\mathbf{b}_2 = \mathbf{e}_4$, $\mathbf{c}_1 = F(\mathbf{e}_1)$, $\mathbf{c}_2 = F(\mathbf{e}_4)$ och (till exempel) $\mathbf{c}_3 = \mathbf{f}_1$ så är $\underline{b} = (\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_4)$ och $\underline{c} = (\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3)$ baser, i V respektive W, och

$$[F]_{cb} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

□

8. $\mathbb{R}^2$ förses med en skalärprodukt $\langle -, - \rangle$, sådan att

$$\underline{b} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$$

utgör en ON-bas. Bestäm maximum av

$$-17\,x_1 + 7\,x_2 \quad \text{då} \quad \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 1.$$

Ange även alla vektorer $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^t$, för vilka maximum antas.

Lösning. Om ξ_1, ξ_2 är koordinaterna för $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^t$ i basen $\underline{b}$ så har vi $\xi_1 \mathbf{b}_1 + \xi_2 \mathbf{b}_2 = \mathbf{x}$. Alltså är ξ_1, ξ_2 den entydiga lösningen till det på matrisform skrivna ekvationssystemet

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x_1 \\ 2 & 3 & x_2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3x_1 - x_2 \\ 0 & 1 & -2x_1 + x_2 \end{array}\right)$$

Av den högra matrisen framgår att $\xi_1 = 3x_1 - x_2$ och $\xi_2 = -2x_1 + x_2$. Eftersom $\underline{b}$ är en ON-bas så ges skalärprodukten av två godtyckliga vektorer, $\mathbf{x} = \xi_1 \mathbf{b}_1 + \xi_2 \mathbf{b}_2$ och $\mathbf{y} = \eta_1 \mathbf{b}_1 + \eta_2 \mathbf{b}_2$, av

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \xi_1 \eta_1 + \xi_2 \eta_2$$

Sambandet $\mathbf{x} = \xi_1 \mathbf{b}_1 + \xi_2 \mathbf{b}_2$ kan skrivas

$$x_1 = \xi_1 + \xi_2 \qquad \text{och} \qquad x_1 = 2\xi_1 + 3\xi_2 \tag{$*$}$$

Av $(*)$ följer att

$$-17\, x_1 + 7\, x_2 = -17\, (\xi_1 + \xi_2) + 7\, (2\xi_1 + 3\xi_2) = -3\xi_1 + 4\xi_2 = \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle,$$

där $\mathbf{a} = -3\mathbf{b}_1 + 4\mathbf{b}_2 = (1, 6)^t$. Problemet kan alltså uttryckas som att vi ska bestämma maximum av $\langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle$ då $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 1$. Enligt Cauchy-Schwarz olikhet antas maximum då $\mathbf{x}$ är en positiv multipel av $\mathbf{a}$; $\mathbf{x} = \lambda \mathbf{a}$, där $\lambda > 0$ och

$$1 = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \langle \lambda \mathbf{a}, \lambda \mathbf{a} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle\, \lambda^2 = 25\, \lambda^2$$

Det innebär att $\lambda = \frac{1}{5}$ och att maximum antas om och endast om $\mathbf{x} = \frac{1}{5}\, \mathbf{a} = (\frac{1}{5}, \frac{6}{5})^t$. Maximalvärdet är

$$\langle \mathbf{a}, \tfrac{1}{5}\, \mathbf{a} \rangle = \tfrac{1}{5}\, \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = 5.$$

$\square$