Lösningar 2013-06-10

1. (a) $$[T] = \left(T(e_1) \middle| T(e_2) \right) = \begin{pmatrix} \cos\frac{3\pi}{4} & -\sin\frac{3\pi}{4} \\ \sin\frac{3\pi}{4} & \cos\frac{3\pi}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}.$$

(b) $$V(T) = K(A) = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}a\\1\end{pmatrix} \right\} = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \right\} = \mathbb{R}^2 \ni y \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

$$T(x) = y \iff Ax = y \iff x = A^{-1}y = \begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1-a\\1\end{pmatrix}.$$

Svar (b). För alla $a \in \mathbb{R}$ gäller att $y \in V(T)$, och $x = \begin{pmatrix}1-a\\1\end{pmatrix}$ är den enda lösningen till ekvationen $T(x) = y$.

2. (a) $$0 = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -4 \\ -2 & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-4 & \lambda-4 \\ -2 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda-4)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda-4)(\lambda+2)$$

löses av $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = -2$.

$$E(4) = N(4I-A) = \left\{ \begin{pmatrix}2t\\t\end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} \right\}$$

$$4I - A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad x_1 = 2x_2; \text{ sätt } x_2 = t.$$

$$E(-2) = N(-2I-A) = \left\{ \begin{pmatrix}-t\\t\end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} \right\}$$

$$-2I - A = \begin{pmatrix} -4 & -4 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad x_1 = -x_2; \text{ sätt } x_2 = t.$$

$$\left.\begin{aligned} b_1 &= \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} \text{ är en bas i } E(4) \\ b_2 &= \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} \text{ är en bas i } E(-2) \end{aligned}\right\} \Rightarrow P = (b_1 | b_2) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ och } D = \begin{pmatrix} 4 & \\ & -2 \end{pmatrix} \text{ löser}$$

$P^{-1}AP = D$, och därmed även $A = PDP^{-1}$.

Svar (a). $P = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ och $D = \begin{pmatrix} 4 & \\ & -2 \end{pmatrix}$, ex. vis.

(b) A är symmetrisk $\forall a \in \mathbb{R}$. Enligt Spektralsatsen är därmed A ortogonalt diagonaliserbar $\forall a \in \mathbb{R}$.

$$0 = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - a & -a \\ -a & \lambda - a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda - 2a & \lambda - 2a \\ -a & \lambda - a \end{vmatrix} = (\lambda - 2a)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -a & \lambda - a \end{vmatrix} = (\lambda - 2a)\lambda$$

löses av $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2a$.

Om $a = 0$, då är $\lambda_1 = 0 = \lambda_2$ det enda egenvärdet till $A = 0$, och $E(0) = \mathbb{E}^2$. Alltså är varje ortogonal bas i $\mathbb{E}^2$ en ortogonal bas av egenvektorer till A.

Antag nu att $a \neq 0$.

$$E(0) = N(0I - A) = \left\{ \begin{pmatrix} -t \\ t \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\} = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$-A = \begin{pmatrix} -a & -a \\ -a & -a \end{pmatrix} \sim \left(\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{array}\right); \quad x_1 = -x_2; \quad \text{sätt } x_2 = t.$$

$$E(2a) = \ldots = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} b_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ är en bas i } E(0) \\ b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ är en bas i } E(2a) \\ \qquad b_1 \perp b_2 \end{array}\right\} \Rightarrow b_1, b_2 \text{ är en ortogonal bas av egenvektorer till } A.$$

<u>Svar</u> (b). <u>För alla</u> $a \in \mathbb{R}$ <u>är</u> A <u>ortogonalt diagonaliserbar</u>.

<u>För alla</u> $a \in \mathbb{R}$ <u>är</u> $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ <u>en ortogonal bas av egenvektorer till</u> A, <u>ex. vis</u>.

3. (a) För varje $p = a_0 1 + a_1 X + a_2 X^2 \in \mathcal{P}_2$ gäller att

$$p \in \mathcal{U} \iff p(0) = p(1) = 0$$

$$\iff \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_0 + a_1 + a_2 = 0 \end{cases}$$

$$\iff a_0 = 0 \text{ och } a_1 = -a_2$$

$$\iff p = a_1(X - X^2)$$

$$\iff p \in \operatorname{span}\{X - X^2\}$$

Alltså är $\mathcal{U} = \operatorname{span}\{X - X^2\}$. Dessutom är $X - X^2 \neq 0$, alltså linjärt oberoende.

<u>Svar</u> (a). $X - X^2$ <u>är en bas i $\mathcal{U}$</u>, <u>ex.vis.</u>

(b) $W = \operatorname{span}\{1\}$ har dimension 1. Alltså är $b = \frac{1}{\|1\|}$ en on-bas i W, och

$$\operatorname{proj}_W(p) = \langle p, b\rangle b = \langle X + X^2, \tfrac{1}{\sqrt{3}}\rangle \tfrac{1}{\sqrt{3}} = \tfrac{1}{3}\langle X + X^2, 1\rangle 1 = \tfrac{2}{3}\,1,$$

då $\|1\|^2 = \langle 1, 1\rangle = 1(-1)1(-1) + 1(0)1(0) + 1(1)1(1) = 1^2 + 1^2 + 1^2 = 3 \Rightarrow \|1\| = \sqrt{3}$

och $\langle X + X^2, 1\rangle = 0\cdot 1 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 2$.

<u>Svar</u> (b). $\operatorname{proj}_W(X + X^2) = \frac{2}{3}\,1$.

4. (a) Kurvan K: $2a x_1 x_2 = 1$ är en hyperbel omm vänsterledets kvadratiska form

$$q(x) = 2a x_1 x_2 = x^T A x, \quad \text{med } A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix},$$

har signaturen $\operatorname{sign}(q) = (1, -1)$, dvs. omm A har ett positivt och ett negativt egenvärde.

$$0 = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda & -a \\ -a & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - a^2 = (\lambda+a)(\lambda-a)$$ löses av $\lambda_1 = a$, $\lambda_2 = -a$.

Om $a \neq 0$, då har a och $-a$ olika tecken, dvs ett av egenvärdena λ_1, λ_2 är positivt och det andra är negativt.

Svar (a). För alla $a \neq 0$ har $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}$ ett positivt och ett negativt egenvärde. Alltså är K en hyperbel för alla $a \neq 0$.

(b) För $a = 1$ är $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$. Om b_1, b_2 är normerade vektorer i $E(1)$, $E(-1)$, då gäller

$$q(x) = 2x_1x_2 = y_1^2 - y_2^2 \qquad \forall\, x = y_1b_1 + y_2b_2 \in \mathbb{E}^2.$$

Hyperbeln K: $2x_1x_2 = 1$ skär y_1-axeln i punkterna $(y_1, y_2) = (\pm 1, 0)$.

Svar (b). Avståndet mellan skärningspunkterna är $d\big((1,0),(-1,0)\big) = 2$.

5. (a)

(IP1) $\langle v, w\rangle = \langle w, v\rangle$

(IP2) $\langle u+v, w\rangle = \langle u,w\rangle + \langle v,w\rangle$

(IP3) $\langle cv, w\rangle = c\langle v,w\rangle$

(IP4) $\langle v,v\rangle > 0 \quad \forall v \neq 0$

(b)

$$\alpha := \begin{cases} \cos^{-1}\left(\dfrac{\langle v,w\rangle}{\|v\|\,\|w\|}\right) & \text{om } v \neq 0 \text{ och } w \neq 0 \\[2ex] \dfrac{\pi}{2} & \text{om } v = 0 \text{ eller } w = 0 \end{cases}$$

(c) $$\|v+w\|^2 = \langle v+w, v+w\rangle = \langle v,v\rangle + \langle v,w\rangle + \langle w,v\rangle + \langle w,w\rangle = \|v\|^2 + 2\langle v,w\rangle + \|w\|^2$$

medför att

$$\langle v,w\rangle = \frac{1}{2}\left(\|v+w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2\right) = \frac{1}{2}\left(7-1-4\right) = \frac{1}{2}2 = 1$$

samt

$$\cos\alpha = \frac{\langle v,w\rangle}{\|v\|\,\|w\|} = \frac{1}{2} \quad , \quad \text{alltså } \alpha = 60^\circ .$$

<u>Svar</u> (c). $\langle v,w\rangle = 1$, $\alpha = 60^\circ$.

6. Skriv $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ istället för $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Vänsterledet i Y:s ekvation blir då

$$q(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 = x^T A x \quad , \quad \text{då } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

A:s egenvärden är lösningarna till

$$0 = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda-1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-3 & \lambda-3 & \lambda-3 \\ -1 & \lambda-1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & \lambda-1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda-3)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda & 0 \\ -1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda-3)\lambda^2 \quad , \quad \text{alltså } \lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = 0 .$$

Från multiplicitetenra läser vi av att $\dim E(3) = 1$ och $\dim E(0) = 2$. Alltså finns det en on-bas $\underline{b} = (b_1, b_2, b_3)$ i $\mathbb{E}^3$ så att $b_1 \in E(3)$ och $b_2, b_3 \in E(0)$. Därmed gäller

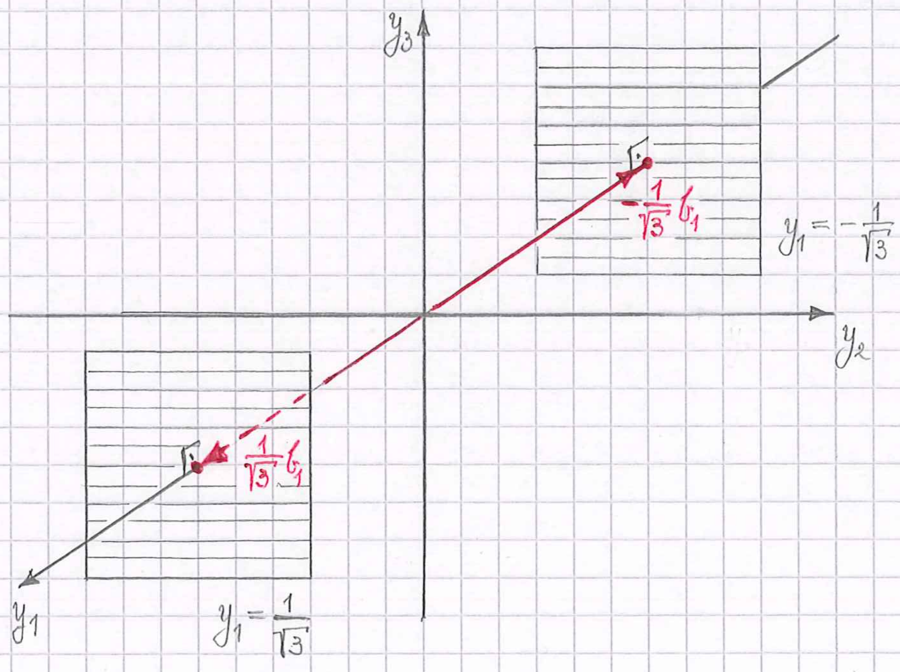
$$q(x) = 3y_1^2 + 0y_2^2 + 0y_3^2 = 3y_1^2 \qquad \forall\, x = y_1b_1 + y_2b_2 + y_3b_3 \in \mathbb{E}^3 .$$

Detta innebär vidare $\forall x \in \mathbb{E}^3$ att

$$x \in Y \Leftrightarrow q(x) = 1 \Leftrightarrow 3y_1^2 = 1 \Leftrightarrow y_1^2 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow y_1 = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

I basen $\underline{b}$ beskriver $y_1 = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ två parallella plan, med gemensam normalvektor b_1, genom punkterna $\pm\frac{1}{\sqrt{3}} b_1$. Ytans minsta avstånd från origo är därmed $\frac{1}{\sqrt{3}}$, och detta antas i punkterna $\pm\frac{1}{\sqrt{3}} b_1 = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \pm\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, eftersom $b_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

Svar. Y består av två parallella plan. Y:s minsta avstånd från origo är $\frac{1}{\sqrt{3}}$, och detta antas i punkterna $\pm\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \in Y$.



7. (a) Standardbasen i $\mathcal{P}_3$ är $\underline{X} = (1, X, X^2, X^3)$. F:s matris i standardbasen är

$$A = [F]_{\underline{X}} = \left([F(1)]_{\underline{X}} \middle| \cdots \middle| [F(X^3)]_{\underline{X}} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 6 \\ & 1 & 2 & 6 \\ & & 1 & 3 \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{då}$$

$$F(1) = 1 + 1' + 1'' + 1''' = 1,$$

$$F(X) = X + X' + X'' + X''' = X + 1,$$

$$F(X^2) = X^2 + (X^2)' + (X^2)'' + (X^2)''' = X^2 + 2X + 2\cdot 1,$$

$$F(X^3) = X^3 + (X^3)' + (X^3)'' + (X^3)''' = X^3 + 3X^2 + 6X + 6\cdot 1.$$

(b) $\det(A) = 1 \Rightarrow A$ är inverterbar $\Rightarrow F$ är inverterbar.

(c) $$[F^{-1}]_{\underline{X}} = [F]_{\underline{X}}^{-1} = A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 6 \\ & 1 & 2 & 6 \\ & & 1 & 3 \\ & & & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ & 1 & -2 & 0 \\ & & 1 & -3 \\ & & & 1 \end{pmatrix}.$$

(d) Givet $q = \sum_{i=0}^{3} b_i X^i \in \mathcal{P}_3$, så söker vi $p = \sum_{i=0}^{3} a_i X^i \in \mathcal{P}_3$ så att $F(p) = q$.

Nu gäller $F(p) = q \Leftrightarrow p = F^{-1}(q)$

$$\Leftrightarrow [p] = [F^{-1}(q)] = [F^{-1}][q] = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ & 1 & -2 & 0 \\ & & 1 & -3 \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 - b_1 \\ b_1 - 2b_2 \\ b_2 - 3b_3 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow p = (b_0 - b_1)1 + (b_1 - 2b_2)X + (b_2 - 3b_3)X^2 + b_3 X^3.$$

8. Systemet kan skrivas som matrisekvationen $y' = Ay$, då $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, $y' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Diagonaliseringsproblemet $S^{-1}AS = D$ löses av $S = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ och $D = \begin{pmatrix} -2 & \\ & 5 \end{pmatrix}$, ex.vis.

Det diagonala systemet $z' = Dz$ löses av $\begin{cases} z_1 = c_1 e^{-2x} \\ z_2 = c_2 e^{5x} \end{cases}$, $(c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$.

Det givna systemet $y' = Ay$ har då den allmänna lösningen

$$y = Sz = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 + 4z_2 \\ -z_1 + 3z_2 \end{pmatrix}, \quad \text{då } \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \text{ som ovan.}$$

<u>Svar.</u> $\begin{cases} y_1 = c_1 e^{-2x} + 4c_2 e^{5x} \\ y_2 = -c_1 e^{-2x} + 3c_2 e^{5x} \end{cases}$, <u>med</u> $(c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$.

8'. Med $S = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ och $D = \begin{pmatrix} -2 & \\ & 5 \end{pmatrix}$ gäller $S^{-1}AS = D$. Detta medför $\forall n \in \mathbb{N}$ att

$$A^n = (SDS^{-1})^n = SD^nS^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 \\ 0 & 5^n \end{pmatrix} \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{7} \begin{pmatrix} (-2)^n & 4 \cdot 5^n \\ -(-2)^n & 3 \cdot 5^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3(-2)^n + 4 \cdot 5^n & (-4)(-2)^n + 4 \cdot 5^n \\ (-3)(-2)^n + 3 \cdot 5^n & 4(-2)^n + 3 \cdot 5^n \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{7} \begin{pmatrix} (-1)^n \cdot 3 \cdot 2^n + 4 \cdot 5^n & (-1)^{n+1} 2^{n+2} + 4 \cdot 5^n \\ (-1)^{n+1} \cdot 3 \cdot 2^n + 3 \cdot 5^n & (-1)^n 2^{n+2} + 3 \cdot 5^n \end{pmatrix}.$$