UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Veronica Crispin Quiñonez

Tentamen
Linjär algebra II 5 hp 1MA024
2019-03-18 kl 8-13

- *Tillåtna medel: sedvanliga skrivdon.*
- *Varje uppgift är värd 5 p. För betyget 3, 4, 5 krävs 18, 25 respektive 32 p. Eventuella bonuspoäng räknas vid resultatet 16 p eller mer.*
- **Varje svar ska motiveras noga! Enbart svar utan motivering ger 0p.** *Skriv tydligt och hoppa inte över nödvändiga steg.*

---

(1) Vilka av nedanstående delmängder är delrum i respektive vektorrum? För varje delrum, ange dess dimension.

(a) Delmängden av alla symmetriska matriser i vektorrummet av alla 3×3-matriser med vanlig matrisaddition och multiplikation med skalär;

(b) $\{(x, y, z)^T \mid y \geq 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$;

(c) $\{p(x) \mid p(0) = 1\} \subseteq P_n(\mathbb{R})$;

(d)

$$\left\{\mathbf{x} \mid \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} = 3\mathbf{x}\right\} \subseteq \mathbb{R}^2.$$

(2) Låt $\mathcal{M}_{2\times 2}$ vara vektorrummet av alla matriser av storlek 2×2 och betrakta delmängden S som består av följande matriser:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},\ M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Ange en bas för det linjära höljet av S, $\mathrm{Span}(S)$.

(b) Avgör om matriserna

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \text{ och } B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

tillhör $\mathrm{Span}(S)$. Uttryck en av dem som $\sum_{i=1}^{4} a_i M_i$ på minst två olika sätt.

(3) Låt $R : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara rotation $\pi/2$ radianer moturs kring z-axeln och $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ortogonal projektion på planet $x + z = 0$.

(a) Ange standardmatriserna $[R]$ och $[P]$ för respektive linjär avbildning. Vad blir $P\big((\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{2})^T\big)$ och $P\big((\sqrt{2}, \sqrt{3}, -\sqrt{2})^T\big)$?

(b) Ange standardmatrisen för den sammansatta avbildningen av att först projicera en vektor på $x + z = 0$ och sedan rotera $\pi/2$ radianer moturs kring z-axeln. Ange kärnan (kernel) för denna sammansatta avbildning.

(4) (a) Definiera begreppet *diagonaliserbar* matris.

(b) Visa att om en matris A är diagonaliserbar (över ett reellt vektorrum), så är även A^{-1} diagonaliserbar.

(c) Avgör vilken av matriserna

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ och } C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

som är diagonaliserbar och förklara varför de två andra inte är det.

(5) Lös följande system av differentialekvationer:

$$\begin{cases} y_1' &= 4y_1 + y_2 - y_3 \\ y_2' &= y_1 + 4y_2 - y_3 \\ y_3' &= 3y_1 + 3y_2 \end{cases}.$$

(6) Definiera en inre produkt på $P_2(\mathbb{R})$ genom $\langle p(x), q(x)\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx$.

(a) Räkna ut normen av standardpolynomen $1, x$ och x^2 samt vinkeln mellan 1 och x.

(b) Ange en ON-bas för $\text{Span}(\{1, x\})$.

(7) Låt $f(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 3x_2^2 + 8x_1x_2$ och $g(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 3x_2^2$.

(a) Gör ett ON-basbyte så att den blandade termen i $f(x_1, x_2)$ försvinner. Vilken geometrisk figur beskriver $f(x_1, x_2) = 1$?

(b) Vilken geometrisk figur beskriver $g(x_1, x_2) = 1$ efter samma variabelbyte som är gjord i (a)?

(8) (a) Definiera begreppet *linjär avbildning.*

(b) Visa att om T är en linjär avbildning, är $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

(c) Låt $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ vara en bas för ett vektorrum V och låt en linjär operator $T : V \to V$ vara definierad via $T(\mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_1, T(\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3, T(\mathbf{v}_3) = 2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3$. Ange en bas för operatorns kärna $\text{Ker}(T)$ respektive bildrum/värderum $R(T)$.

LYCKA TILL!