TENTAMEN - LINEAR ALGEBRA II 2020/03/16

JULIAN KÜLSHAMMER

English version

Time: 8.00-13.00. No aids allowed except a pen. All solutions should be accompanied with justifications.
Each of the following exercises is worth 5 points, i.e. the total score of the tenta is 40 points. If you achieve 18, 25, or 32 points, respectively, you will receive grade 3,4, or 5.
Up to 4 bonus points from the dugga on 2020/02/21 can be used for this tentamen.

1. (i) Which of the following subsets are subspaces of the given vector spaces? Justify your answer.

- $U_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x + 3y + z = 0, \quad y - 2z = 0 \right\}$,
- $U_2 = \{p \in P_{\leq 4}(\mathbb{R}) \,|\, p(x) = p(-x)\}$,
- $U_3 = \left\{ A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \,\middle|\, A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

(ii) For each subspace in (i) determine a basis and give its dimension.

2. Let $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ and $C = \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

(i) Prove that B and C are bases of $\mathbb{R}^3$.

(ii) Compute the base change matrix $P_{B \leftarrow C}$ from C to B (*the notation of the course book is* $P_{C \to B}$).

(iii) Let $v \in \mathbb{R}^3$ be the vector which satisfies $[v]_C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Determine $[v]_B$.

3. Let $P_{\leq n}(\mathbb{R})$ be the space of all polynomials of degree at most n.

(i) Determine whether or not the polynomials

$$\begin{aligned} p_1(x) &= 1 - x^2, \\ p_2(x) &= 2 + 5x + x^2, \\ p_3(x) &= -4x + 3x^2 \end{aligned}$$

are linearly independent in $P_{\leq 2}(\mathbb{R})$.

(ii) Show that the function $f\colon P_{\leq 2}(\mathbb{R}) \to P_{\leq 1}(\mathbb{R})$ given by $f(a + bx + cx^2) = b + cx$ is linear.

4. (i) Compute the eigenvalues of $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

(ii) For each eigenvalue, determine a basis of the corresponding eigenspace.

(iii) What are the eigenvalues and corresponding eigenspaces of A^3? Justify your answer.

5. Consider the basis $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ of $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ and the basis $C = \{1, x\}$ of $P_{\leq 1}(\mathbb{R})$.

(i) Determine the coordinate vector of $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$ with respect to the basis B and the coordinate vector of $2 - 7x$ with respect to the basis C.

(ii) Let $f\colon M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to P_{\leq 1}(\mathbb{R})$ be the linear map given by

$$f(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = (a+d) + (b+c)x.$$

Determine the matrix of f with respect to the bases B of $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ and C of $P_{\leq 1}(\mathbb{R})$.

(iii) Give a basis of the kernel $\ker(f)$.

6. Let V be an inner product space and let $U \subseteq V$ be a subspace.

(i) Give the definition of the orthogonal complement $U^\perp$ of U in V.

(ii) For $U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x + 2y - z = 0 \right\}$ determine orthonormal bases of U and of $U^\perp$.

7. (i) What kind of curve is $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 7x^2 + 4xy + y^2 = 1 \right\}$?

(ii) Sketch the set $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 4x^2 - 9y^2 = 1 \right\}$ in the xy-plane.

8. Let V and W be vector spaces.

(i) Let $v_1 \neq v_2 \in V$. Let $f\colon V \to W$ be a linear map such that $f(v_1) = f(v_2) \neq 0_W$. Show that v_1 and v_2 are linearly independent.

(ii) Let $f, g\colon V \to W$ be linear maps and let $u, v \in V$ such that $f(u) = g(u) \neq 0_W$ and $f(v) = -g(v) \neq 0_W$. Show that f and g are linearly independent in the space of all functions $V \to W$.

Good luck!

Svensk version

Skrivtid: 8:00–13:00. Inga hjälpmedel förutom skrivdon. Lösningarna skall åtföljas av förklarande text.
Tentamen består av åtta uppgifter värda 5 poäng vardera, d.v.s. maximalt kan man få 40 poäng på tentamen. Ett resultat om minst 18, 25, resp. 32 poäng ger betyg 3,4, resp. 5.
Upp till 4 bonuspoäng från duggan på 2020/02/21 kan användas för denna tentamen.

1. (i) Vilka av följande delmängder är delrum av det angivna vektorrummet? Motivera ditt svar.

- $U_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x + 3y + z = 0, \quad y - 2z = 0 \right\}$,
- $U_2 = \{p \in P_{\leq 4}(\mathbb{R}) \,|\, p(x) = p(-x)\}$,
- $U_3 = \left\{ A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \,\middle|\, A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

(ii) För varje delrum i (i) bestäm en bas och ange dess dimension.

2. Låt $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ och $C = \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

(i) Visa att B och C är baser av $\mathbb{R}^3$.
(ii) Bestäm basbytesmatrisen $P_{B\leftarrow C}$ från C till B *(bokens notation är $P_{C\to B}$)*
(iii) Låt $v \in \mathbb{R}^3$ vara vektorn som uppfyller $[v]_C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Bestäm $[v]_B$.

3. Låt $P_{\leq n}(\mathbb{R})$ vara vektorrummet av alla polynomer av grad högst n.

(i) Avgör om polynomen

$$\begin{aligned} p_1(x) &= 1 - x^2, \\ p_2(x) &= 2 + 5x + x^2, \\ p_3(x) &= -4x + 3x^2 \end{aligned}$$

är linjärt oberoende i $P_{\leq 2}(\mathbb{R})$.

(ii) Visa att funktionen $f\colon P_{\leq 2}(\mathbb{R}) \to P_{\leq 1}(\mathbb{R})$ som ges av $f(a + bx + cx^2) = b + cx$ är linjär.

4. (i) Bestäm egenvärdena av $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

(ii) För varje egenvärde, bestäm en bas av motsvarande egenrum.

(iii) Vad är egenvärdena och motsvarande egenrum av A^3? Motivera ditt svar.

5. Betrakta basen $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ av $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ och basen $C = \{1, x\}$ av $P_{\leq 1}(\mathbb{R})$.

(i) Bestäm koordinatvektorn av $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$ med avseende på basen B och koordinatvektorn av $2 - 7x$ med avseende på basen C.

(ii) Låt $f\colon M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to P_{\leq 1}(\mathbb{R})$ vara den linjära avbildning som ges av

$$f(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = (a + d) + (b + c)x.$$

Bestäm f:s matris med avseende på baserna B av $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ och C av $P_{\leq 1}(\mathbb{R})$.

(iii) Ange en bas av kärnan $\ker(f)$.

6. Låt V vara ett inreproduktrum och låt $U \subseteq V$ vara ett delrum.

(i) Definiera begreppet ortogonalt komplement $U^\perp$ av U i V.

(ii) För $U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x + 2y - z = 0 \right\}$ bestäm ortonormalbaser av U och av $U^\perp$.

7. (i) Vilken typ av kurva är $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 7x^2 + 4xy + y^2 = 1 \right\}$?

(ii) Skissa mängden $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 4x^2 - 9y^2 = 1 \right\}$ i xy-planet.

8. Låt V och W vara vektorrum.

(i) Låt $v_1 \neq v_2 \in V$. Låt $f\colon V \to W$ vara en linjär avbildning med $f(v_1) = f(v_2) \neq 0_W$. Visa att v_1 och v_2 är linjärt oberoende.

(ii) Låt $f, g\colon V \to W$ vara linjära avbildningar och låt $u, v \in V$ med $f(u) = g(u) \neq 0_W$ och $f(v) = -g(v) \neq 0_W$. Visa att f och g är linjärt oberoende i vektorrummet av alla funktioner $V \to W$.

Lycka till!