UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Seidon Alsaody

Prov i matematik
F2, IT2, W2, Lärare
Linjär algebra II
2021-01-08

Skrivtid: 8.00 - 13.00. Tillåtna hjälpmedel: kursboken och allt material på den Studium/Canvas-sida där denna tentamen finns, ingenting annat. Varje uppgift är värd 5 poäng. Samtliga lösningar ska vara försedda med tydliga resonemang; ***ett svar utan resonemang kan inte ge full poäng****. Ett resultat på 18, 25 resp. 32 poäng garanterar betyg 3, 4 resp. 5. För dem som gick kursen under period 2 HT 2020 finns även ett alternativt sätt att räkna poäng, som står beskrivet i kursplaneringen.* ***An English version of the exam can be found below.*** *Lösningar på svenska eller engelska godtas. Lycka till!*

Notation: $\mathbb{P}_n$ *betecknar vektorrummet av alla reella polynom av grad högst* n*.*

1. Var och en av följande delfrågor ska besvaras med JA eller NEJ. Om svaret är JA måste ett exempel anges. Om svaret är NEJ måste en kort motivering ges till varför det är så.

a) Finns det en diagonaliserbar (3×3)-matris med endast två egenvärden?

b) Finns det två linjära avbildningar $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ och $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som uppfyller $f(1) = g(1)$ men $f(2) \neq g(2)$?

c) Finns det en skalärprodukt på $\mathbb{P}_2$ med avseende på vilken polynomet $p(x) = x$ har längd $\sqrt{2}$?

2. I vektorrumen $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{M}_{2\times 2}$ (dvs rummet av alla reella (2×2)-matriser), respektive $\mathbb{P}_1$ betraktar vi följande delmängder:

a) $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x \text{ är ett heltal} \right\} \subseteq \mathbb{R}^2$,

b) $\{D \in \mathbb{M}_{2\times 2} \mid D \text{ är en diagonalmatris}\} \subseteq \mathbb{M}_{2\times 2}$,

c) $\{a + bx \in \mathbb{P}_1 \mid a = |b|\} \subseteq \mathbb{P}_1$,

Avgör, i vart och ett av fallen, om delmängden är ett underrum av vektorrummet i fråga. Om ja, visa detta, och ange en bas för underrummet. Om inte, motivera kort varför.

3. Den linjära avbildningen $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{P}_2$ är sådan att

$$F \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = x - x^2 \text{ och } F \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 - x^2.$$

a) Bestäm matrisen till F med avseende på standardbaserna för $\mathbb{R}^2$ och $\mathbb{P}_2$.

b) Är F injektiv? Motivera ditt svar.

c) Är F surjektiv? Motivera ditt svar.

4. Den linjära avbildningen $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ ges i standardbasen av matrisen

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Visa att 1, 0 och -1 är egenvärden till F. (Sekularpolynomet bör ej beräknas.)

b) Bestäm en bas för egenrummet till egenvärdet 1. Vilken är dimensionen av detta egenrum?

c) Vad kan du dra för slutsats från detta om ifall F är diagonaliserbar eller inte? Motivera kort! (Du behöver inte genomföra diagonaliseringen.)

5. I denna uppgift betraktar vi $\mathbb{R}^3$ med standardskalärprodukten. Låt a och b vara reella tal, med $a > 0$, och definiera

$$\mathbf{u}_1 = a \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ -2 \end{pmatrix} \text{ och } \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{18}} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestäm talen a och b så att $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ blir en ortonormal mängd av vektorer.

b) Med dessa värden på a och b, bestäm den ortogonala projektionen av $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ på det linjära höljet $[\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2]$.

6. Betrakta den kurva i planet som ges av ekvationen

$$5x_1^2 - 2x_1x_2 + 5x_2^2 = 1.$$

a) Avgör om denna kurva är en ellips, en hyperbel, eller ingetdera.

b) Finn en ON-bas för planet så att kurvans ekvation i de nya koordinaterna saknar blandade termer, dvs är på huvudaxelform/diagonalform. Ange även denna ekvation.

7. Finn den lösning till systemet av differentialekvationer

$$\begin{cases} y_1' &= -6y_1 - 8y_2 \\ y_2' &= 4y_1 + 6y_2 \end{cases}$$

som uppfyller $y_1(0) = 1$ och $y_2(0) = 2$.

8. På mängden $W = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ definierar vi en ny addition, betecknad $\oplus$, och en ny multiplikation med skalärer, betecknad $\bullet$, som följer:

$$x \oplus y = xy \text{ och } \lambda \bullet x = x^\lambda$$

för alla $x, y \in W$ och alla skalärer $\lambda \in \mathbb{R}$. Med dessa operationer är W ett vektorrum, där nollvektorn är talet 1 (du behöver inte visa det). Låt dessutom V vara vektorrummet $\mathbb{R}$ med vanlig addition och multiplikation med skalärer.

a) Visa att $f : V \to W$ som definieras av $f(x) = 2^x$ är en linjär avbildning.

b) Vilka $x \in \mathbb{R}$ uppfyller $2^x = 1$? Vilka möjliga värden kan 2^x anta? Använd detta för att avgöra om f är en isomorfi.

UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Seidon Alsaody

Prov i matematik
F2, IT2, W2, Lärare
Linjär algebra II
2021-01-08

This is the English version of the exam. Writing time: 8.00 - 13.00. Permitted aids: the course book and all the material on the Studium/Canvas page where this exam is published, nothing else. Each problem is worth 5 points. All solutions must contain clear reasoning; ***an answer without reasoning cannot give full mark.*** *A total of 18, 25 and 32 points, respectively, guarantees the grade 3, 4 and 5, respectively. Those who took the course during Period 2 of the autumn semester of 2020 can also have their score calculated in an alternative way, as detailed in the course planning. Answers can be written in English or Swedish. Good luck!*

Notation: $\mathbb{P}_n$ *denotes the vector space of all real polynomials of degree at most* n.

1. Each of the following questions must be answered with YES or NO. If the answer is YES, an example must be provided. If the answer is NO, a short explanation must be given.

a) Is there a diagonalisable (3×3)-matrix having only two eigenvalues?

b) Are there two linear maps $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ and $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfying $f(1) = g(1)$ but $f(2) \neq g(2)$?

c) Is there a scalar product on $\mathbb{P}_2$ with respect to which the polynomial $p(x) = x$ has length $\sqrt{2}$?

2. Consider the following subsets of the vector spaces $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{M}_{2\times 2}$ (i.e. the space of all real (2×2)-matrices) and $\mathbb{P}_1$, respectively:

a) $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x \text{ is an integer} \right\} \subseteq \mathbb{R}^2$,

b) $\{D \in \mathbb{M}_{2\times 2} \mid D \text{ is a diagonal matrix}\} \subseteq \mathbb{M}_{2\times 2}$,

c) $\{a + bx \in \mathbb{P}_1 \mid a = |b|\} \subseteq \mathbb{P}_1$,

Determine, in each of the cases, whether or not the subset is a subspace of the vector space in question. If it is, prove this, and find a basis for the subspace. If not, briefly explain why not.

3. The linear map $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{P}_2$ is such that

$$F \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = x - x^2 \text{ and } F \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 - x^2.$$

a) Find the matrix of F with respect to the standard bases of $\mathbb{R}^2$ and $\mathbb{P}_2$.

b) Is F injective? Explain your answer.

c) Is F surjective? Explain your answer.

4. The linear map $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ is given, in the standard basis, by the matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Show that 1, 0 and -1 are eigenvalues of F. (Secular polynomial needs not be found.)

b) Find a basis of the eigenspace of the eigenvalue 1. What is the dimension of this eigenspace?

c) What can you conclude from this about whether F is diagonalisable? Explain briefly! (You do not need to perform the diagonalisation.)

5. In this problem we consider $\mathbb{R}^3$ equipped with the standard scalar product. Let a and b be real numbers with $a > 0$, and define

$$\mathbf{u}_1 = a \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ -2 \end{pmatrix} \text{ and } \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{18}} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Determine the numbers a and b such that $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ is an orthonormal set of vectors.

b) With these values of a and b, determine the orthogonal projection of $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ onto the span $[\mathbf{u}_1\ \mathbf{u}_2]$.

6. Consider the curve in the plane that is given by the equation

$$5x_1^2 - 2x_1x_2 + 5x_2^2 = 1.$$

a) Determine whether this curve is an ellipse, a hyperbola, or neither.

b) Find an ON-basis of the plane, such that the equation of the curve in the new coordinates has no mixed terms, i.e. is in principal axis form/diagonal form. Also, give this equation.

7. Find the solution of the system of differential equations

$$\begin{cases} y_1' &= -6y_1 - 8y_2 \\ y_2' &= 4y_1 + 6y_2 \end{cases}$$

that satisfies $y_1(0) = 1$ and $y_2(0) = 2$.

8. On the set $W = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ we define a new addition, denoted $\oplus$, and a new multiplication by scalars, denoted $\bullet$, as follows:

$$x \oplus y = xy \text{ and } \lambda \bullet x = x^\lambda$$

for all $x, y \in W$ and all scalars $\lambda \in \mathbb{R}$. Equipped with these operations, W is a vector space, where the zero vector is the real number 1 (you do not need to show this). Let further V be the vector space $\mathbb{R}$ with the usual addition and multiplication by scalars.

a) Show that $f : V \to W$ defined by $f(x) = 2^x$ is a linear map.

b) Which $x \in \mathbb{R}$ satisfy $2^x = 1$? Which possible values can 2^x take? Use this to determine whether f is an isomorphism.