UPPSALA UNIVERSITET
MATEMATISKA INSTITUTIONEN
MARTIN HERSCHEND

TENTAMEN 2021–10–25
LINJÄR ALGEBRA II
HÖSTTERMINEN 2021

Skrivtid: 8:00-13:00. Tillåtna hjälpmedel: endast skrivdon. Tentan består av 8 uppgifter och varje uppgift är värd 5 poäng. Totalt krävs 18 poäng för betyget 3, 25 poäng för betyget 4 och 32 poäng för betyget 5. Alla lösningar ska innehålla fullständiga resonemang och inte bara svar.

Notation: Vektorrummet av alla polynom av grad som mest n betecknas $\mathbb{P}_n$.

Uppgift 1. Var och en av följande delfrågor ska besvaras JA eller NEJ. Om svaret är JA ska ett exempel anges. Om svaret är NEJ ska en kort motivering ges.

(a) Finns det en (3×5)-matris A så att kolonnrummet av A har dimension 4?

(b) Finns det en linjär avbildning $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ så att kärnan av F har dimension 1 och bilden av F har dimension 2?

(c) Finns det ett vektorrum $\mathbb{V}$ med en nollskild vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$ så att $3\mathbf{v} = \mathbf{v}$?

Uppgift 2. Bestäm värdet på det reella talet a så att vektorerna

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ a \end{pmatrix}$$

är linjärt beroende. Skriv $\mathbf{v}_3$ som en linjärkombination av $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ för detta värde på a.

Uppgift 3. Låt $F : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{R}^3$ vara funktionen som ges av

$$F(p) = \begin{pmatrix} p(-1) \\ p(0) \\ p(1) \end{pmatrix}.$$

(a) Visa att F är en linjär avbildning.

(b) Bestäm matrisen för F med avseende på basen $(1\ x\ x^2)$ i $\mathbb{P}_2$ och standardbasen i $\mathbb{R}^3$.

(c) Är F injektiv?

(d) Är F surjektiv?

Uppgift 4. Låt $\mathbb{V}$ vara ett vektorrum med en skalärprodukt och en ortonormal bas $\underline{\mathbf{b}} = (\mathbf{b}_1\ \mathbf{b}_2\ \mathbf{b}_3)$. Låt $\mathbf{u} = \mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_3$ och $\mathbf{v} = 3\mathbf{b}_1 + 3\mathbf{b}_3$.

(a) Beräkna längderna $|\mathbf{u}|$, $|\mathbf{v}|$ och $|\mathbf{u} + \mathbf{v}|$.

(b) Beräkna vinkeln mellan $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$.

Var god vänd

Uppgift 5. Utrusta $\mathbb{R}^4$ med standardskalärprodukten och låt $\mathbb{U}$ vara underrummet av $\mathbb{R}^4$ som ges av

$$\mathbb{U} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right].$$

(a) Hitta en ON-bas i $\mathbb{U}$.

(b) Vad är dimensionen av $\mathbb{U}$?

(c) Bestäm den ortogonala projektionen av vektorn $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ på $\mathbb{U}$.

Uppgift 6. Bestäm vilken typ av yta som ges av ekvationen

$$2x_1^2 + 3x_2^2 - 3x_3^2 + 8x_2x_3 = 50,$$

samt vilka punkter på ytan som ligger närmast origo. Punkternas koordinater ska anges i det ursprungliga koordinatsystemet.

Uppgift 7. Betrakta följande system av linjära differentialekvationer

$$\begin{cases} y_1' = 6y_1 - 4y_2, \\ y_2' = 8y_1 - 6y_2, \\ y_3' = 3y_1 - 4y_2 + 3y_3. \end{cases}$$

(a) Bestäm alla lösningar till systemet.

(b) Bestäm den lösning som uppfyller $y_1(0) = 2$, $y_2(0) = 3$ och $y_3(0) = 1$.

Uppgift 8. Låt A vara en diagonaliserbar (3×3)-matris (över de reella talen). Visa att om $A^4 = I$ så är A inverterbar och $A = A^{-1}$.