UPPSALA UNIVERSITET
MATEMATISKA INSTITUTIONEN
MARTIN HERSCHEND

TENTAMEN 2021–10–25
LINJÄR ALGEBRA II
HÖSTTERMINEN 2021

Skrivtid: 8:00-13:00. Tillåtna hjälpmedel: endast skrivdon. Tentan består av 8 uppgifter och varje uppgift är värd 5 poäng. Totalt krävs 18 poäng för betyget 3, 25 poäng för betyget 4 och 32 poäng för betyget 5. Alla lösningar ska innehålla fullständiga resonemang och inte bara svar.

Notation: Vektorrummet av alla polynom av grad som mest n betecknas $\mathbb{P}_n$.

Uppgift 1. Var och en av följande delfrågor ska besvaras JA eller NEJ. Om svaret är JA ska ett exempel anges. Om svaret är NEJ ska en kort motivering ges.

(a) Finns det en (3×5)-matris A så att kolonnrummet av A har dimension 4?

(b) Finns det en linjär avbildning $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ så att kärnan av F har dimension 1 och bilden av F har dimension 2?

(c) Finns det ett vektorrum $\mathbb{V}$ med en nollskild vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$ så att $3\mathbf{v} = \mathbf{v}$?

a) Nej, $\dim K(A) = \text{rang}(A) \leq 3$ ty A är 3×5.

b) Ja, till exempel $F(\vec{x}) = A\vec{x}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\dim \text{im} F = \text{rang}(A) = 2$

$\dim \ker F = 3 - \dim \text{im} F = 3 - 2 = 1.$

c) Nej $3\vec{v} = \vec{v} \Rightarrow 2\vec{v} = \vec{0} \Longrightarrow \vec{v} = \frac{1}{2} \cdot \vec{0} = \vec{0}.$

Uppgift 2. Bestäm värdet på det reella talet a så att vektorerna

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ a \end{pmatrix}$$

är linjärt beroende. Skriv $\mathbf{v}_3$ som en linjärkombination av $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ för detta värde på a.

Beroendeekvationen motsvarar

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -4 & 0 \\ 1 & 3 & a & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 0 \\ 0 & 2 & a-1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & a-1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & a-5 & 0 \end{array}\right)$$

Nollskild lösning $\Leftrightarrow a-5=0 \Leftrightarrow a=5$. Det vill säga $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ linjärt beroende omm $a=5$.

$a=5$ ger

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$ lösningar $\vec{x} = \begin{pmatrix} s \\ -2s \\ s \end{pmatrix}$ $s \in \mathbb{R}$.

$s=1$ ger lösningen $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Alltså

$1\vec{v}_1 - 2\vec{v}_2 + \vec{v}_3 = 0$ så $\vec{v}_3 = -\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2$

Koll $-\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} = \vec{v}_3$ ok.

Uppgift 3. Låt $F : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{R}^3$ vara funktionen som ges av

$$F(p) = \begin{pmatrix} p(-1) \\ p(0) \\ p(1) \end{pmatrix}.$$

(a) Visa att F är en linjär avbildning.

(b) Bestäm matrisen för F med avseende på basen $(1\ x\ x^2)$ i $\mathbb{P}_2$ och standardbasen i $\mathbb{R}^3$.

(c) Är F injektiv?

(d) Är F surjektiv?

a) • $F(p+q) = \begin{pmatrix} (p+q)(-1) \\ (p+q)(0) \\ (p+q)(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p(-1)+q(-1) \\ p(0)+q(0) \\ p(1)+q(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p(-1) \\ p(0) \\ p(1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q(-1) \\ q(0) \\ q(1) \end{pmatrix}$

$= F(p) + F(q)$

• $F(\lambda p) = \begin{pmatrix} \lambda p(-1) \\ \lambda p(0) \\ \lambda p(1) \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} p(-1) \\ p(0) \\ p(1) \end{pmatrix} = \lambda F(p).$

b) Skriv $\underline{b} = (\vec{b}_1\ \vec{b}_2\ \vec{b}_3) = (1\ x\ x^2)$, $\underline{e} = (\vec{e}_1\ \vec{e}_2\ \vec{e}_3)$

Då är $[F]_{\underline{e}}^{\underline{b}} = \left(F(\vec{b}_1)_{\underline{e}}\ F(\vec{b}_2)_{\underline{e}}\ F(\vec{b}_3)_{\underline{e}} \right) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = A$

c), d) Vi beräknar rang(A)

$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Dvs rang$(A) = 3 \Rightarrow A$ inverterbar

så F är injektiv

och F är surjektiv.

Uppgift 4. Låt $\mathbb{V}$ vara ett vektorrum med en skalärprodukt och en ortonormal bas $\underline{\mathbf{b}} = (\mathbf{b}_1\ \mathbf{b}_2\ \mathbf{b}_3)$. Låt $\mathbf{u} = \mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_3$ och $\mathbf{v} = 3\mathbf{b}_1 + 3\mathbf{b}_3$.

(a) Beräkna längderna $|\mathbf{u}|$, $|\mathbf{v}|$ och $|\mathbf{u}+\mathbf{v}|$.

(b) Beräkna vinkeln mellan $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$.

Var god vänd

a) $\underline{b}$ ON $\Rightarrow$ $(\vec{x} \mid \vec{y}) = (\vec{x})_{\underline{b}} \cdot (\vec{y})_{\underline{b}}$

Alltså $(\vec{u} \mid \vec{u}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 + 1 + 1 = 2 \Rightarrow |\vec{u}| = \sqrt{2}$

$(\vec{v} \mid \vec{v}) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 9 + 0 + 9 = 18 \Rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}.$

$(\vec{u}+\vec{v} \mid \vec{u}+\vec{v}) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 9 + 1 + 4 = 14 \Rightarrow |\vec{u}+\vec{v}| = \sqrt{14}$

b) $(\vec{u} \mid \vec{v}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = -3$

vinkeln är

$$\cos^{-1}\left(\frac{(\vec{u} \mid \vec{v})}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{-3}{\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2}}\right) = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$$

Uppgift 5. Utrusta $\mathbb{R}^4$ med standardskalärprodukten och låt $\mathbb{U}$ vara underrummet av $\mathbb{R}^4$ som ges av

$$\mathbb{U} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right].$$

(a) Hitta en ON-bas i $\mathbb{U}$.

(b) Vad är dimensionen av $\mathbb{U}$?

(c) Bestäm den ortogonala projektionen av vektorn $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ på $\mathbb{U}$.

a) Vi använder Gram-Scmidt ortonormalisering

på $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\vec{u}_1 = \frac{1}{|\vec{v}_1|}\vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{4}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_{2\perp\vec{u}_1} = \vec{v}_2 - (\vec{v}_2 | \vec{u}_1)\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{2+0+2+0}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u}_2 = \frac{1}{|\vec{v}_{2\perp\vec{u}_1}|}\vec{v}_{2\perp\vec{u}_1} = \frac{1}{\sqrt{4}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_{3\perp\vec{u}_1,\vec{u}_2} = \vec{v}_3 - (\vec{v}_3 | \vec{u}_1)\vec{u}_1 - (\vec{v}_3 | \vec{u}_2)\vec{u}_2$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1+0+2+1}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1-0+2-1}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u}_3 = \frac{1}{|\vec{v}_{3\perp\vec{u}_1,\vec{u}_2}|}\vec{v}_{3\perp\vec{u}_1,\vec{u}_2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Uppgift 5. Utrusta $\mathbb{R}^4$ med standardskalärprodukten och låt $\mathbb{U}$ vara underrummet av $\mathbb{R}^4$ som ges av

$$\mathbb{U} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right].$$

(a) Hitta en ON-bas i $\mathbb{U}$.

(b) Vad är dimensionen av $\mathbb{U}$?

(c) Bestäm den ortogonala projektionen av vektorn $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ på $\mathbb{U}$.

ON-bas $\underline{u} = (\vec{u}_1\ \vec{u}_2\ \vec{u}_3) = \left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\ \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\ \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

b) $\underline{u}$ består av 3 vektorer så $\dim \mathbb{U} = 3$.

c) $\text{proj}_{\mathbb{U}}(\vec{v}) = (\vec{v}|\vec{u}_1)\vec{u}_1 + (\vec{v}|\vec{u}_2)\vec{u}_2 + (\vec{v}|\vec{u}_3)\vec{u}_3$

$$= \frac{2}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{2}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{2}{4}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Uppgift 6. Bestäm vilken typ av yta som ges av ekvationen

$$2x_1^2 + 3x_2^2 - 3x_3^2 + 8x_2x_3 = 50,$$

samt vilka punkter på ytan som ligger närmast origo. Punkternas koordinater ska anges i det ursprungliga koordinatsystemet.

Vi skriver högerledet som $Q(\vec{x}) = \bar{x}^t A \bar{x}$

där $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix}$. Eftersom $A^t = A$

finns en ON egenbas till A enligt spektralsatsen.

Egenvärden: $\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 4 \\ 0 & 4 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 \\ 4 & -3-\lambda \end{vmatrix}$

$= (2-\lambda)\left((3-\lambda)(-3-\lambda) - 16\right) = (2-\lambda)(\lambda^2 - 9 - 16) = (2-\lambda)(\lambda^2 - 25)$

$= (2-\lambda)(\lambda-5)(\lambda+5)$

$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 5, \quad \lambda_3 = -5$

Det finns alltså en ortonormal matris T

så att $T^t A T = D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$

Sätt $T\vec{y} = \vec{x}$ så att $Q(\vec{x}) = \vec{y}^t D \vec{y} = 2y_1^2 + 5y_2^2 - 5y_3^2$.

Då är $Q(\vec{x}) = 50 \iff 2y_1^2 + 5y_2^2 - 5y_3^2 = 50$.

Ytan är en enmantlad hyperboloid.

Närmaste punkterna uppfyller $y_1 = y_3 = 0$ dvs

$5y_2^2 = 50 \iff y_2 = \pm\sqrt{10}$

Uppgift 6. Bestäm vilken typ av yta som ges av ekvationen

$$2x_1^2 + 3x_2^2 - 3x_3^2 + 8x_2x_3 = 50,$$

samt vilka punkter på ytan som ligger närmast origo. Punkternas koordinater ska anges i det ursprungliga koordinatsystemet.

$\vec{y} = \pm \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{10} \\ 0 \end{pmatrix}$ motsvarar $\vec{x} = \pm\sqrt{10}\,\vec{u}_2$ där

$\vec{u}_2$ är en normerad egenvektor med egenvärde $\lambda_2 = 5$

Vi löser $(A - \lambda_2 I)\vec{v} = \vec{0}$:

$$\begin{array}{c} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} \\ \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & -8 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \\ -4 \\ \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & -8 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{array}{cccc} & & t & \\ \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2t \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$t = \frac{1}{\sqrt{5}}$ ger $\vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ så att $|\vec{u}_1| = 1$.

Alltså är $\vec{x} = \pm\sqrt{10}\,\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \pm\sqrt{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Närmaste punkter är

$$(x_1, x_2, x_3) = (0, 2\sqrt{2}, \sqrt{2})$$
$$(x_1, x_2, x_3) = (0, -2\sqrt{2}, -\sqrt{2})$$

Uppgift 7. Betrakta följande system av linjära differentialekvationer

$$\begin{cases} y_1' = 6y_1 - 4y_2, \\ y_2' = 8y_1 - 6y_2, \\ y_3' = 3y_1 - 4y_2 + 3y_3. \end{cases}$$

(a) Bestäm alla lösningar till systemet.

(b) Bestäm den lösning som uppfyller $y_1(0) = 2$, $y_2(0) = 3$ och $y_3(0) = 1$.

Systemet ges av $y' = Ay$ $\quad A = \begin{pmatrix} 6 & -4 & 0 \\ 8 & -6 & 0 \\ 3 & -4 & 3 \end{pmatrix}$

Vi diagonaliserar A:

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 6-\lambda & -4 & 0 \\ 8 & -6-\lambda & 0 \\ 3 & -4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)\begin{vmatrix} 6-\lambda & -4 \\ 8 & -6-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)\big((6-\lambda)(-6-\lambda)+32\big)$$

$$= (3-\lambda)(\lambda^2-36+32) = (3-\lambda)(\lambda^2-4) = (3-\lambda)(\lambda-2)(\lambda+2)$$

$\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = 2 \quad \lambda_3 = -2$

Vi löser $(A-\lambda_i I)\vec{x} = \bar{0}$: $\quad i = 1, 2, 3$

$\underline{\lambda_1 = 3}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -4 & 0 & 0 \\ 8 & -9 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -4 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \qquad\qquad r \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} \quad \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}$$

$\underline{\lambda_2 = 2}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -4 & 0 & 0 \\ 8 & -8 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 8 & -8 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \begin{array}{c} \qquad\qquad s \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} \quad \vec{X} = \begin{pmatrix} s \\ s \\ s \end{pmatrix}$$

Uppgift 7. Betrakta följande system av linjära differentialekvationer

$$\begin{cases} y_1' = 6y_1 - 4y_2, \\ y_2' = 8y_1 - 6y_2, \\ y_3' = 3y_1 - 4y_2 + 3y_3. \end{cases}$$

(a) Bestäm alla lösningar till systemet.

(b) Bestäm den lösning som uppfyller $y_1(0) = 2$, $y_2(0) = 3$ och $y_3(0) = 1$.

$$\underline{\lambda_3 = -2} \qquad \tfrac{1}{8} \quad -1 \left(\begin{array}{ccc|c} 8 & -4 & 0 & 0 \\ 8 & -4 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 5 & 0 \end{array}\right) \sim -3 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 5 & 0 \end{array}\right) \sim -\tfrac{2}{5} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{2} & 5 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \tfrac{1}{2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \quad\quad\quad\; t \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} \qquad \vec{X} = \begin{pmatrix} t \\ 2t \\ t \end{pmatrix}$$

Sätt $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

så att $T^{-1}AT = D$

Sätt $T\vec{z} = \vec{y}$ så att

$\vec{y}' = A\vec{y} \iff \vec{z}' = D\vec{z} \iff \vec{z}(t) = \begin{pmatrix} C_1 e^{3t} \\ C_2 e^{2t} \\ C_3 e^{-2t} \end{pmatrix} \quad C_i \in \mathbb{R}$

Då är $\vec{y}(t) = T\vec{z}(t) = \begin{pmatrix} C_2 e^{2t} + C_3 e^{-2t} \\ C_2 e^{2t} + 2C_3 e^{-2t} \\ C_1 e^{3t} + C_2 e^{2t} + C_3 e^{-2t} \end{pmatrix}$

a) Alla lösningar

$$\begin{cases} y_1(t) = C_2 e^{2t} + C_3 e^{-2t} \\ y_2(t) = C_2 e^{2t} + 2C_3 e^{-2t} \\ y_3(t) = C_1 e^{3t} + C_2 e^{2t} + C_3 e^{-2t} \end{cases} \quad C_i \in \mathbb{R}.$$

Uppgift 7. Betrakta följande system av linjära differentialekvationer

$$\begin{cases} y_1' = 6y_1 - 4y_2, \\ y_2' = 8y_1 - 6y_2, \\ y_3' = 3y_1 - 4y_2 + 3y_3. \end{cases}$$

(a) Bestäm alla lösningar till systemet.

(b) Bestäm den lösning som uppfyller $y_1(0) = 2$, $y_2(0) = 3$ och $y_3(0) = 1$.

b) Villkoren uppfylls då $T\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

dvs $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ så

$$\begin{cases} y_1(t) = e^{2t} + e^{-2t} \\ y_2(t) = e^{2t} + 2e^{-2t} \\ y_3(t) = -e^{3t} + e^{2t} + e^{-2t} \end{cases}$$

Uppgift 8. Låt A vara en diagonaliserbar (3×3)-matris (över de reella talen). Visa att om $A^4 = I$ så är A inverterbar och $A = A^{-1}$.

A diagonaliserbar ger att det finns T inverterbar, D diagonal så att

$$T^{-1}AT = D$$

Då är $D^4 = T^{-1}ATT^{-1}ATT^{-1}ATT^{-1}AT$

$$= T^{-1}A^4T = T^{-1}IT = T^{-1}T = I$$

Skriv $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$. Då är $D^4 = \begin{pmatrix} \lambda_1^4 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^4 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^4 \end{pmatrix}$,

så för $i = 1, 2, 3$ får vi

$$\lambda_i^4 = 1 \implies \lambda_i^2 = \pm 1 \implies \lambda_i = \pm 1 \implies \lambda_i^2 = 1.$$

Alltså är $D^2 = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

Till slut får vi $A^2 = (TDT^{-1})^2 = TD^2T^{-1} = TT^{-1} = I$

så A är inverterbar och $A^{-1} = A$.