Tentamen 2022-01-12: lösningsförslag

1\. a) Ja, tex $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

b) Nej, enligt dimensionssatsen måste $\dim(N(F)) + \dim(V(F)) = \dim \mathbb{R}^5$, men $4+2 \neq 5$.

c) Ja, tex $\bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\bar{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\bar{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2a) Vi beräknar $F(p(x))$ där $p(x)$ är 1, x resp. x^2.

$p(x) = 1 \Rightarrow F(p(x)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$p(x) = x \Rightarrow F(p(x)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$p(x) = x^2 \Rightarrow F(p(x)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Den sökta matrisen är därför $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Svar: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Tex polynomet $p(x) = x - x^2$ uppfyller $p(0) = 0$ och $p(1) = 0$. Därför tillhör $p(x) = x - x^2$ kärnan, eftersom $F(p(x)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Avbildningen F är därför <u>inte</u> injektiv.

3a) Om $K \neq 0$ gäller att nollpolynomet ej tillhör U, eftersom derivatan av nollpolynomet är noll överallt.

→

3a) forts. Om $K=0$ är U ett underrum, eftersom

* Nollpolynomet uppfyller $p'(0)=0$ och $p'(1)=0$.

* Om $p(x)$ uppfyller $p'(0)=0$ och $p'(1)=0$,
och $q(x)$ " $q'(0)=0$ och $q'(1)=0$,
så gäller $(p+q)'(0)=p'(0)+q'(0)=0$, och likaså $(p+q)'(1)=0$,
dvs om $p(x)\in U$ och $q(x)\in U$, så gäller $(p+q)(x)\in U$.

* Om $p(x)$ uppfyller $p'(0)=0$ och $p'(1)=0$ och $\lambda\in\mathbb{R}$,
så gäller $\lambda p'(0)=0$ och $\lambda p'(1)=0$, dvs om $p(x)\in U$ och $\lambda\in\mathbb{R}$, så gäller $\lambda p(x)\in U$.

b) Låt alltså $K=0$. Att $p(x)=a+bx+cx^2+dx^3\in U$ innebär att
$\begin{cases} p'(0)=0 \\ p'(1)=0 \end{cases}$. Eftersom $p'(x)=b+2cx+3dx^2$ är detta
ekvivalent med $\begin{cases} b=0 \\ b+2c+3d=0 \end{cases} \iff \begin{matrix} b=0 \\ c=-\frac{3}{2}d \end{matrix}$ (a och d är fria variabler)

Detta betyder att

$$U=\{a+0x+(-\tfrac{3}{2}d)x^2+dx^3 \mid a,d\in\mathbb{R}\}$$

lin. ober.

$$=\{a\cdot 1+d(-\tfrac{3}{2}x^2+x^3) \mid a,d\in\mathbb{R}\}=[1,\ x^3-\tfrac{3}{2}x^2].$$

Svar: En bas är $(1,\ x^3-\frac{3}{2}x^2)$.

4a) Vi löser sekularekvationen

$$\det(A-\lambda I)=0 \iff \det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & -2 \\ -2 & 0-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} =$$

utveckla längs rad 3

$$=(1-\lambda)\big((3-\lambda)(-\lambda)+2\big)=(1-\lambda)(\lambda^2-3\lambda+2)$$
$$=(1-\lambda)(\lambda-2)(\lambda-1)$$

Så egenvärdena är 1 och 2

alg. mult. 2 alg. mult. 1

4a) forts. Egenvektorer:

$$\underline{\lambda=1}: \quad (A-1\cdot I)\bar{x}=\bar{0} \iff \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & \text{fri} & \text{fri} & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

$$\iff \bar{x} = \begin{pmatrix} -s/2+t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad s,t \in \mathbb{R}.$$

$$\underline{\lambda=2} \quad (A-2I)\bar{x}=\bar{0} \iff \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
$$\begin{array}{ccc} & \uparrow & \\ & \text{fri} & \end{array}$$

$$\iff \bar{x} = \begin{pmatrix} -t \\ t \\ 0 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad t \in \mathbb{R}$$

Svar: Egenvärdena är 1 med egenrum $\left[\begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$
och 2 med egenrum $\left[\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]$

b) Ja, F är diagonaliserbar eftersom varje egenvärdes geometriska multiplicitet är lika med dess algebraiska multiplicitet.

c) Ja, t. ex $\bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ uppfyller

$$F(\bar{x}) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix},$$ som ej är en

multipel av $\bar{x}$.

5 a) Vi kvadratkompletterar

$$2x_1^2 + 2x_1x_2 + Kx_2^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow 2(x_1^2 + x_1x_2) + Kx_2^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow 2(\underbrace{x_1^2 + 2\cdot\tfrac{1}{2}x_1x_2 + \tfrac{1}{4}x_2^2} - \tfrac{1}{4}x_2^2) + Kx_2^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow 2(x_1 + \tfrac{1}{2}x_2)^2 - 2\cdot\tfrac{1}{4}x_2^2 + Kx_2^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow 2(x_1 + \tfrac{1}{2}x_2)^2 + (K - \tfrac{1}{2})x_2^2 = 1$$

Detta är pos. def. om och endast om $K - \frac{1}{2} > 0$, vilket är precis då kurvan är en ellips.

Svar: $K > \frac{1}{2}$.

[Alternativ lösn: kurvan ges av $\bar{x}^t A \bar{x} = 1$, där $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & K \end{pmatrix}$.

Ta fram egenvärden:

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & K-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (2-\lambda)(K-\lambda) - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 - (2+K)\lambda + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{2+K}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2+K}{2}\right)^2 - 1}$$

$$= 1 + \frac{K}{2} \pm \sqrt{\frac{4+4K+K^2}{4} - 1}$$

$$= 1 + \frac{K}{2} \pm \sqrt{K + \frac{K^2}{4}}$$

och avgör när $\lambda > 0$.]

5b) Nu har vi

$$2x_1^2+2x_1x_2+2x_2^2=1 \iff \bar{x}^t A \bar{x}=1 \quad \text{där } A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}.$$

Vi behöver hitta egenvärden och en ON-bas av egenvektorer.

$$\det A-\lambda I = \det\begin{pmatrix}2-\lambda & 1\\ 1 & 2-\lambda\end{pmatrix} = (2-\lambda)^2-1=0$$

$$\iff (2-\lambda)^2=1$$

$$\iff 2-\lambda=\pm 1 \iff \lambda=1 \text{ eller } \lambda=3.$$

$\lambda=1$: egenrum:
$$(A-1\cdot I)\bar{x}=\bar{0} \iff \left(\begin{array}{cc|c}1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{array}\right)$$

Bas för egenrummet: $\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$. ON-bas: $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$

$\lambda=3$: egenrum:
$$(A-3I)\bar{x}=\bar{0} \iff \left(\begin{array}{cc|c}-1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0\end{array}\right).$$

Bas för egenrummet: $\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$. ON-bas: $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$

Svar: I basen $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}\right)$ har ekvationen

formen $y_1^2+3y_2^2=1$.

6a) Det ortogonala komplementet till L är planet med ekvation $2x+y+2z=0$. Vi väljer två ortogonala vektorer i planet, t.ex. $\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix}1\\ -4\\ 1\end{pmatrix}$ (ty $2\cdot 1+0+2\cdot(-1)=0$ och $2\cdot 1+(-4)+2\cdot 1=0$).

Dessa skalas om så att de får längd 1, och vi får

$$\bar{b}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \bar{b}_2=\frac{1}{\sqrt{18}}\begin{pmatrix}1\\ -4\\ 1\end{pmatrix}.$$

Svar: $\bar{b}_1$ och $\bar{b}_2$ ovan.

b) I basen $(\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{v})$ har F matrisen $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

7 a) Vi har $\bar{y}' = A\bar{y}$ med $A = \begin{pmatrix} 10 & -6 \\ 18 & -11 \end{pmatrix}$.

Vi diagonaliserar A: ...

Egenvärden: $\det\begin{pmatrix} 10-\lambda & -6 \\ 18 & -11-\lambda \end{pmatrix} = 0 \iff (10-\lambda)(-11-\lambda) + 6\cdot 18 = 0$

$\iff \lambda^2 + \lambda - 110 + 108 = 0$

$\iff \lambda^2 + \lambda - 2 = 0$

$\iff \lambda = -2$ eller $\lambda = 1$.

Egenvektorer till $\lambda = 1$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 9 & -6 & 0 \\ 18 & -12 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Bas för egenrumet: $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Egenvektorer till $\lambda = -2$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 12 & -6 & 0 \\ 18 & -9 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Bas för egenrumet: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Alltså är $A = TDT^{-1}$ med $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ och $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

Dvs $\bar{y}' = A\bar{y} = TDT^{-1}\bar{y} \iff T^{-1}\bar{y}' = DT^{-1}\bar{y} \iff \bar{z}' = D\bar{z}$,

där $\bar{z} = T^{-1}\bar{y}$. Detta system har lösningen

$$\bar{z} = \begin{pmatrix} Ce^{t} \\ De^{-2t} \end{pmatrix} \qquad C, D \in \mathbb{R}$$

och således

$$\bar{y} = T\bar{z} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Ce^{t} \\ De^{-2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2Ce^{t} + De^{-2t} \\ 3Ce^{t} + 2De^{-2t} \end{pmatrix}$$

Svar: $\begin{cases} y_1(t) = 2Ce^{t} + De^{-2t} \\ y_2(t) = 3Ce^{t} + 2De^{-2t} \end{cases}$ $C, D \in \mathbb{R}$.

b) Vi har $\begin{cases} y_1(0) = 2C + D = 1 \\ y_2(0) = 3C + 2D = 0 \end{cases}$, vilket ger $\begin{cases} C = 2 \\ D = -3 \end{cases}$

Svar: $\begin{cases} y_1(t) = 4e^{t} - 3e^{-2t} \\ y_2(t) = 6e^{t} - 6e^{-2t} \end{cases}$

8 a) Låt $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$. Vi vill visa att $v - F(\bar{v}) \in N(F)$, dvs att $F(\bar{v} - F(\bar{v})) = \bar{0}$. Men

$$F(\bar{v} - F(\bar{v})) = A(\bar{v} - A\bar{v}) = A\bar{v} - \underbrace{A^2}_{=A}\bar{v} = A\bar{v} - A\bar{v} = \bar{0},$$

vilket skulle visas.

b) Om $\bar{v} \in N(F)$ så gäller $F(\bar{v}) = A\bar{v} = \bar{0}$.

Om $\bar{v} \in V(F)$ så gäller $\bar{v} = F(\bar{w}) = A\bar{w}$ för något $\bar{w} \in \mathbb{R}^n$.

Då ger $A\bar{v} = \bar{0}$ att $AA\bar{w} = \bar{0}$, dvs $A^2\bar{w} = 0$.

Men $A^2 = A$, så då är $A\bar{w} = 0$, dvs $\bar{v} = 0$, vilket skulle visas