UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Lars-Åke Lindahl

PROV I MATEMATIK
**Linjär algebra III, 5hp**
2008–03–12

An English translation of the examination problems follows on page 3.

**Skrivtid: 08.00 – 13.00**

**Anvisningar:** Efter varje uppgift anges den maximala poängen för densamma. För full poäng krävs att lösningen är *nöjaktigt motiverad.*

Hoppa över uppgift 1 om du erhållit 30–49 poäng på inlämningsuppgifterna.

Hoppa över uppgifterna 1 och 2 om du erhållit 50–69 poäng på inlämningsuppgifterna.

Hoppa över uppgifterna 1, 2 och 3 om du erhållit 70 poäng eller mer på inlämningsuppgifterna.

Överhoppade uppgifter tillgodoräknas med 5 poäng vardera när poängsumman på provet summeras.

**Betygsgränser:** För betygen 3, 4 resp. 5 krävs minst 18, 25 resp. 32 poäng.

1. Avgör om det finns någon linjär avbildning $T\colon \mathbf{R}^3 \to \mathcal{P}$ (rummet av alla polynom) med följande avbildningsegenskaper:

$$\begin{aligned} T(1,1,1) &= t^2+t+1 \\ T(1,0,-1) &= 2t^2+t+2 \\ T(1,2,3) &= 2t+1 \end{aligned}$$
(5 p)

2. Låt $v_1, v_2, \dots, v_n$ vara en följd av nollskilda, parvis ortogonala vektorer i ett inre produktrum. Visa att följden är linjärt oberoende. (5 p)

3. En linjär operator $T$ på ett tredimensionellt vektorrum har matrisen

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 4 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

med avseende på någon bas. Bestäm operatorns karakteristiska polynom och operatorns minimalpolynom. (5 p)

4. a) Definiera vad som menas med den *duala basen* till basen $e_1, e_2, \dots, e_n$ för vektorrummet $V$. (1 p)
   b) Bestäm den duala basen till basen $e_1 = (1,1)$, $e_2 = (1,2)$ i $\mathbf{R}^2$. (2 p)

c) Definiera vad som menas med *kilprodukten (yttre produkten)* $\phi \wedge \omega$ i det fall då $\phi$ är en alternerande 1-form och $\omega$ är en en alternerande 2-form på ett vektorrum $V$.
Ange också sambandet mellan $\phi \wedge \omega$ och $\omega \wedge \phi$? (2 p)

5. Vektorrummet $\mathbf{R}^2$ görs till ett inre produktrum med hjälp av följande inre produkt:
$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + 2x_1 y_2 + 2x_2 y_1 + 5x_2 y_2.$$
Bestäm adjunkten $T^*$ till den linjära operatorn $T$ med avseende på detta inre produktrum om
$$T(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2, 3x_1 + 5x_2).$$ (5 p)

6. $T$ är en linjär operator med adjunkt $T^*$ på ett inre produktrum $V$. Bevisa att $\mathcal{N}(T) = \mathcal{V}(T^*)^{\perp}$. ($\mathcal{N}$ betecknar nollrum och $\mathcal{V}$ betecknar värderum.) (5 p)

7. $T$ är en linjär operator på ett reellt vektorrum $V$. Vektorrummet $V$ är en direkt summa av de två $T$-invarianta delrummen $W_1$ och $W_2$, som har dimensionerna $\dim W_1 = 8$ och $\dim W_2 = 7$.

Låt $T_1$ beteckna restriktionen av $T$ till delrummet $W_1$, uppfattad som operator $W_1 \to W_1$, och låt $T_2$ beteckna motsvarande restriktion till delrummet $W_2$.

Bestäm $T$:s karakteristiska polynom $\chi_T(t)$ och minimalpolynom $\phi_T(t)$ givet att man vet att $T_1$:s och $T_2$:s minimalpolynom är
$$\phi_{T_1}(t) = (t-1)(t-2)(t^2+1)^3 \text{ respektive } \phi_{T_2}(t) = (t-1)^2(t^2+1)^2.$$
(5 p)

8. $S$ och $T$ är två linjära operatorer på ett fyrdimensionellt vektorrum $V$. Med avseende på en given bas $e_1, e_2, e_3, e_4$ har $S$ matrisen $A$ och $T$ matrisen $B$, där
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Är det möjligt att införa en inre produkt på $V$ så att operatorn $S$ blir normal? Ge i så fall exempel på en sådan.
b) Är det möjligt att införa en inre produkt på $V$ så att operatorn $T$ blir normal? Ge i så fall exempel på en sådan. (5 p)

## English translation

**Time: 08.00 – 13.00**

**Instructions:** The maximal credit points for each problem is stated after each problem. For full credit the solution should be accompanied by explanations.

Skip problem no 1 if you have obtained 30–49 points on your assignments.

Skip problems no 1 and 2 if you have obtained 50–69 points on your assignments.

Skip problems no 1, 2, and 3 if you have obtained 70 points or more on your assignments.

Skipped problems will be credited with 5 points each when the total sum of this final test is calculated.

**Grades:** For grades 3, 4, and 5, respectively a total sum of at least 18, 25, and 32 points, respectively, is required.

1. Decide whether there exists a linear mapping $T\colon \mathbf{R}^3 \to \mathcal{P}$ (the space of all polynomials) with the following mapping properties:

$$\begin{aligned} T(1,1,1) &= t^2 + t + 1 \\ T(1,0,-1) &= 2t^2 + t + 2 \\ T(1,2,3) &= 2t + 1 \end{aligned}$$

(5 p)

2. Let $v_1, v_2, \ldots, v_n$ be a sequence of nonzero, mutually orthogonal vectors in an inner product space. Prove that the sequence is linearly independent. (5 p)

3. A linear operator $T$ on a three dimensional vector space has matrix

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 4 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

with respect to some basis. Find its characteristic polynomial and its minimal polynomial. (5 p)

4. a) Define what is meant by the *dual basis* of the basis $e_1, e_2, \ldots, e_n$ in the vector space $V$. (1 p)

   b) Determine the dual basis of the basis $e_1 = (1,1)$, $e_2 = (1,2)$ in $\mathbf{R}^2$. (2 p)

c) Define the *wedge product (the exterior product)* $\phi \wedge \omega$ in the case when $\phi$ is an alternating 1-form and $\omega$ is an alternating 2-form on a vector space $V$.
Also, write down the relation between $\phi \wedge \omega$ and $\omega \wedge \phi$? (2 p)

5. The vector space $\mathbf{R}^2$ is given the structure of an inner product space by defining the following inner product:

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + 2x_1 y_2 + 2x_2 y_1 + 5x_2 y_2.$$

Determine the adjoint $T^*$ of the linear operator $T$ with respect to this inner product space if

$$T(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2, 3x_1 + 5x_2). \qquad (5 \text{ p})$$

6. $T$ is a linear operator with adjoint $T^*$ on an inner product space $V$. Prove that $\mathcal{N}(T) = \mathcal{V}(T^*)^\perp$. ($\mathcal{N}$ denotes null space and $\mathcal{V}$ denotes image space.) (5 p)

7. $T$ is a linear operator on a real vector space $V$, and $V$ is a direct sum of two $T$-invariant subspaces $W_1$ and $W_2$, whose dimensions are $\dim W_1 = 8$ and $\dim W_2 = 7$.

Let $T_1$ denote the restriction of $T$ to the subspace $W_1$, considered as an operator $W_1 \to W_1$, and let $T_2$ denote the corresponding restriction to the subspace $W_2$.

Determine $T$:s characteristic polynomial $\chi_T(t)$ and minimal polynomial $\phi_T(t)$ given the information that $T_1$:s and $T_2$:s minimal polynomials are

$$\phi_{T_1}(t) = (t-1)(t-2)(t^2+1)^3 \text{ and } \phi_{T_2}(t) = (t-1)^2(t^2+1)^2. \qquad (5 \text{ p})$$

8. $S$ and $T$ are two linear operators on a four dimensional vector space $V$. With respect to some given basis $e_1, e_2, e_3, e_4$ the matrix of the operator $S$ is $A$ and the matrix of $T$ is $B$, where

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Is it possible to define an inner product on $V$ in such a way that the operator $S$ becomes normal? If so, give an example of such an inner product.

b) Is it possible to define an inner product on $V$ in such a way that the operator $T$ becomes normal? If so, give an example of such an inner product. (5 p)