UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Lars-Åke Lindahl

PROV I MATEMATIK
Linjär algebra III, 5hp
2009–06–08

An English translation of the examination problems follows on page 3.

Skrivtid: 08.00 – 13.00

Anvisningar: Efter varje uppgift anges den maximala poängen för densamma. För full poäng krävs att lösningen är *nöjaktigt motiverad.*

Betygsgränser: För betygen 3, 4 resp. 5 krävs minst 18, 25 resp. 32 poäng.

1. Bestäm den duala basen till basen $(1, 1, 1)$, $(1, 2, 0)$, $(1, -1, 1)$ för $\mathbf{R}^3$. (5 p)

2. Låt $\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4$ beteckna den duala basen till standardbasen för $\mathbf{R}^4$ och definiera en alternerande tvåform ω genom att sätta

$$\omega = (3\chi_2 + \chi_3) \wedge (\chi_1 + 2\chi_3).$$

   Beräkna $\omega(v, w)$ för vektorerna $v = (0, 2, 3, 4)$ och $w = (1, 0, 2, 5)$. (5 p)

3. Bestäm alla minstakvadratlösningar till det inkonsistenta linjära ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 \phantom{{}+x_2} + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 \phantom{{}+x_3} = 1 \\ \phantom{x_1 + {}} x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$$

   (5 p)

4. Låt T vara en linjär operator på ett ändligtdimensionellt vektorrum V.
   (a) Definiera vad som menas med att λ är ett *egenvärde* till T. (1 p)
   (b) Visa att mängden $\mathcal{E}_\lambda(T)$ av alla egenvektorer (inklusive nollvektorn) till T som hör till egenvärdet λ är ett linjärt delrum av V. (1 p)
   (c) Visa att dimensionen hos $\mathcal{E}_\lambda(T)$ inte kan överstiga egenvärdets algebraiska multiplicitet. (3 p)

5. En reell symmetrisk $n \times n$-matris A kallas *positiv* om $x^t A x \geq 0$ för alla kolonnvektorer x med n element.
   (a) Visa att matrisen

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

   är positiv. (3 p)
   (b) Visa att om λ är ett egenvärde till en positiv matris A så är $\lambda \geq 0$. (2 p)

6. Låt T vara en linjär operator på ett ändligtdimensionellt vektorrum V.

   (a) Definiera vad som menas med ett *annihilerande polynom* till T. (1 p)

   (b) Definiera vad som menas med T:s *minimalpolynom* $\phi_T(t)$. (1 p)

   (c) Bevisa att minimalpolynomet $\phi_T(t)$ är en delare till varje annihilerande polynom. (2 p)

   (d) Bevisa att λ är ett egenvärde till T om och endast om λ är ett nollställe till minimalpolynomet. (4 p)

7. Låt T vara operatorn på $\mathbf{C}^4$ med matrisen

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   med avseende på standardbasen.

   (a) Bestäm operatorns karakteristiska polynom och operatorns minimalpolynom. (2 p)

   (b) Bestäm en Jordans normalform för operatorn T samt en Jordanbas. (5 p)

English translation

Time: 08.00 – 13.00

Instructions: The maximal credit points for each problem is stated after each problem. For full credit the solution should be accompanied by explanations.

Grades: For grades 3, 4, and 5, respectively a total sum of at least 18, 25, and 32 points, respectively, is required.

1. Find the dual basis of the basis $(1, 1, 1)$, $(1, 2, 0)$, $(1, -1, 1)$ for $\mathbf{R}^3$. (5 p)

2. Let $\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4$ denote the dual basis of the standard basis for $\mathbf{R}^4$ and define the alternating two-form ω by

$$\omega = (3\chi_2 + \chi_3) \wedge (\chi_1 + 2\chi_3).$$

Compute $\omega(v, w)$ when $v = (0, 2, 3, 4)$ and $w = (1, 0, 2, 5)$. (5 p)

3. Find all least square solutions of the linear system

$$\begin{cases} x_1 \phantom{{}+x_2} + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 \phantom{{}+x_3} = 1 \\ \phantom{x_1+{}} x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$$

(5 p)

4. Let T be a linear operator on a finite dimensional vector space V.
   (a) Define what it means for λ to be an *eigenvalue* of T. (1 p)
   (b) Prove that the set $\mathcal{E}_\lambda(T)$ of all eigenvectors (with the zero vector included) of T corresponding to the eigenvalue λ is a linear subspace of V. (1 p)
   (c) Prove that the dimension of $\mathcal{E}_\lambda(T)$ is less than or equal to the algebraic multiplicity of the eigenvalue λ. (3 p)

5. A real symmetric $n \times n$-matrix A is called *positive* if $x^t A x \geq 0$ for all column vectors x with n elements.
   (a) Prove that the matrix

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

   is positive. (3 p)
   (b) Prove that $\lambda \geq 0$ for all eigenvalues λ of a positive matrix A. (2 p)

6. Let T be a linear operator on a finite dimensional vector space V.
   (a) Define what is meant by an *annihilating polynomial* of T. (1 p)
   (b) Define what is meant by T:s *minimal polynomial* $\phi_T(t)$. (1 p)
   (c) Prove that the minimal polynomial $\phi_T(t)$ is a divisor of every annihilating polynomial. (2 p)
   (d) Prove that λ is an eigenvalue of T if and only if λ is a root of the minimal polynomial. (4 p)

7. Let T be the operator on $\mathbf{C}^4$ with maxtrix

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   with respect to the standard basis.
   (a) Find the characteristic polynomial and the minimal polynomial of T. (2 p)
   (b) Find the Jordan normal form of T and a Jordan basis. (5 p)