UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Lars-Åke Lindahl

PROV I MATEMATIK
Linjär algebra III, 5hp
2009–08–25

An English translation of the examination problems follows on page 3.

Skrivtid: 08.00 – 13.00

Anvisningar: Efter varje uppgift anges den maximala poängen för densamma. För full poäng krävs att lösningen är *nöjaktigt motiverad.*

Betygsgränser: För betygen 3, 4 resp. 5 krävs minst 18, 25 resp. 32 poäng.

1. a) V är ett vektorrum med bas $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Definiera vad som menas med den *duala basen.*
   b) Bestäm den duala basen till basen $(1,1,0)$, $(0,1,1)$, $(1,1,1)$ för $\mathbf{R}^3$.
   (5 p)

2. a) Definiera vad som menas med kilprodukten $\chi \wedge \omega$ av två alternerande 2-former χ och ω på ett vektorrum V.
   b) Antag att χ är en alternerande 2-form på $\mathbf{R}^4$. Motivera varför det finns en konstant a så att
   $$\chi \wedge \chi(x,y,z,w) = a \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \end{vmatrix}$$
   för alla vektorer $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, $\ldots$, $w = (w_1, w_2, w_3, w_4)$ i $\mathbf{R}^4$.
   c) Låt e_1, e_2, e_3, e_4 beteckna standardbasen i $\mathbf{R}^4$. Bestäm konstanten a i uppgift b) om $\chi(e_1, e_2) = 1$, $\chi(e_1, e_3) = 2$, $\chi(e_1, e_4) = -1$, $\chi(e_2, e_3) = 4$, $\chi(e_2, e_4) = 1$ och $\chi(e_3, e_4) = 5$.
   (6 p)

3. En matris A kallas som bekant normal om $CC^* = C^*C$. Antag att A och B är två symmetriska reella matriser. Visa att matrisen $C = A + \mathrm{i}B$ är normal om och endast om $AB = BA$.
   (5 p)

4. Låt W vara det linjära delrum av $\mathbf{R}^4$ (med standardskalärprodukten) som spänns upp av vektorerna $(1,1,1,1)$ och $(1,2,-1,-1)$. Bestäm den ortogonala projektionen av vektorn $(3,4,3,5)$ på det ortogonala komplementet $W^\perp$.
   (5 p)

5. V betecknar vektorrummet av alla kontinuerligt deriverbara funktioner på reella axeln. Sätt
   $$W = \{f \in V \mid f(0) + f(1) = f'(0) = 0.\}$$

a) Visa att W är ett linjärt delrum till V.
b) Bestäm dimensionen hos kvotrummet V/W. (5 p)

6. Låt T vara operatorn på $\mathbf{C}^4$ med matrisen

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

med avseende på standardbasen.

(a) Bestäm operatorns karakteristiska polynom och operatorns minimalpolynom. (2 p)
(b) Bestäm en Jordans normalform för operatorn T samt en Jordanbas. (6 p)

7. T är en linjär operator på ett 3-dimensionellt vektorrum V med minimalpolynom $\phi_T(t) = (t-1)^2(t+3)$. Vilka av följande påståenden är sanna? Motivera!

(i) $\mathcal{N}(T-I) \cap \mathcal{N}(T+3I) = \{0\}$.
(ii) $\mathcal{N}((T-I)^2) \cap \mathcal{N}(T+3I) = \{0\}$.
(iii) $\mathcal{N}(T-I) + \mathcal{N}(T+3I) = V$.
(iv) $\mathcal{N}((T-I)^2) + \mathcal{N}(T+3I) = V$.
(v) T är diagonaliserbar.
(vi) $\dim \mathcal{V}(T-I) = 2$. (6 p)

English translation

Time: 08.00 – 13.00

Instructions: The maximal credit points for each problem is stated after each problem. For full credit the solution should be accompanied by explanations.

Grades: For grades 3, 4, and 5, respectively a total sum of at least 18, 25, and 32 points, respectively, is required.

1. a) V is a vector space with basis $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Define what is meant by its *dual basis*.
   b) Find the dual basis of the basis $(1,1,0)$, $(0,1,1)$, $(1,1,1)$ for $\mathbf{R}^3$.
   (5 p)

2. a) Define the wedge product $\chi \wedge \omega$ of two alternating 2-forms χ och ω on a vector space V.
   b) Suppose χ is an alternating 2-form on $\mathbf{R}^4$. Give reasons for the existence of a constant a such that

$$\chi \wedge \chi(x, y, z, w) = a \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \end{vmatrix}$$

   for all vectors $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, $\ldots$, $w = (w_1, w_2, w_3, w_4)$ in $\mathbf{R}^4$.
   c) Let e_1, e_2, e_3, e_4 denote the standard basis for $\mathbf{R}^4$. Determine the value of the constant a given that $\chi(e_1, e_2) = 1$, $\chi(e_1, e_3) = 2$, $\chi(e_1, e_4) = -1$, $\chi(e_2, e_3) = 4$, $\chi(e_2, e_4) = 1$ and $\chi(e_3, e_4) = 5$.
   (6 p)

3. A matrix A is said to be normal if $CC^* = C^*C$. Suppose that A and B are two symmetric real matrices. Prove that the matrix $C = A + \mathrm{i}B$ is normal if and only if $AB = BA$.
   (5 p)

4. Let W be the linear subspace of $\mathbf{R}^4$ (equipped with the standard scalar product) that is spanned by the two vectors $(1,1,1,1)$ and $(1,2,-1,-1)$. Find the orthogonal projection of the vector $(3,4,3,5)$ on the orthogonal complement $W^\perp$.
   (5 p)

5. V denotes the vector space of all continuously differentiable functions on the real line, and

$$W = \{f \in V \mid f(0) + f(1) = f'(0) = 0.\}$$

a) Prove that W is a linear subspace of V.
b) Find the dimension of the quotient space V/W. (5 p)

6. The operator T on $\mathbf{C}^4$ has the matrix

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

with respect to the standard basis.

(a) Find its characteristic polynomial and its minimal polynomial. (2 p)
(b) Determine the Jordan normal form of the operator T and a Jordan basis. (6 p)

7. T is a linear operator on a 3-dimensional vector space V with minimal polynomial $\phi_T(t) = (t-1)^2(t+3)$. Which one of the following assertions are true? Justify your answers.

(i) $\mathcal{N}(T-I) \cap \mathcal{N}(T+3I) = \{0\}$.
(ii) $\mathcal{N}((T-I)^2) \cap \mathcal{N}(T+3I) = \{0\}$.
(iii) $\mathcal{N}(T-I) + \mathcal{N}(T+3I) = V$.
(iv) $\mathcal{N}((T-I)^2) + \mathcal{N}(T+3I) = V$.
(v) T is diagonalizable.
(vi) $\dim \mathcal{V}(T-I) = 2$. (6 p)