UPPSALA UNIVERSITET	PROV I MATEMATIK
Matematiska institutionen	**Linjär algebra III, 5hp**
Lars-Åke Lindahl	2010–04–06

Skrivtid: 08.00 – 13.00

Anvisningar: Efter varje uppgift anges den maximala poängen för densamma. För full poäng krävs att lösningen är *nöjaktigt motiverad.*

Betygsgränser: För betygen 3, 4 resp. 5 krävs minst 18, 25 resp. 32 poäng.

1. Definiera följande begrepp.

   a) Annihilerande polynom och minimalpolynom till en linjär operator T.

   b) Adjunkten T^* till en linjär operator T på ett inreproduktrum V.

   c) Antag att T är en linjär operator på ett 4-dimensionellt reellt vektorrum V och att operatorns minimalpolynom är polynomet
   $$\phi_T(t) = (t^2+1)(t+1).$$
   Vad kan sägas om operatorns karakteristiska polynom?

   d) Bestäm om det finns någon linjär operator $T\colon \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ med
   $$\{x \in \mathbf{R}^4 \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$$
   som nollrum och och vars bildrum spänns upp av vektorerna $(1, 0, 1)$ och $(0, 1, 1)$.

   e) T är en linjär operator på ett 2-dimensionellt inreproduktrum och operatorns matris med avseende på någon ON-bas är
   $$\begin{bmatrix} 1+2i & 3-i \\ -3+i & 2+3i \end{bmatrix}$$
   Är T normal?

   f) En reell symmetrisk $n \times n$-matris A kallas positiv om $x^t Ax \geq 0$ för alla kolonnvektorer x med n element. Visa att matrisen
   $$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$
   är positiv.

   g) Visa att om λ är ett egenvärde till en positiv matris A så är $\lambda \geq 0$.

   (8 p)

2. Låt $\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4$ vara den duala basen till standardbasen i $\mathbf{R}^4$, och definiera en alternerande 2-form ω genom att sätta
   $$\omega = (2\chi_1 + \chi_4) \wedge (\chi_1 + 3\chi_4).$$
   Beräkna $\omega(v, w)$ då $v = (2, 1, 3, 2)$ och $w = (0, 4, -1, 5)$. (4 p)

3. Låt V vara vektorrummet av alla kontinuerligt deriverbara funktioner på reella axeln och sätt

$$W = \{f \in V \mid f(0) + f(1) = f'(0) = 0\}.$$

Visa att W är ett linjärt delrum samt bestäm dimensionen hos kvotrummet V/W. (4 p)

4. Bevisa att minimalpolynomet $\phi_T(t)$ till en linjär operator T är en delare till varje annihilerande polynom till operatorn. (4 p)

5. T är en linjär operator på något ändligdimensionellt reellt vektorrum med minimalpolynom $\phi_T(t) = t^2 + t + 1$, och v är en godtycklig nollskild vektor. Bevisa att v och Tv spänner upp ett T-invariant delrum W och att $\dim W = 2$. (4 p)

6. Antag att T är en symmetrisk operator (dvs. $T^* = T$) på ett reellt inreproduktrum. Bevisa att operatorn $(T - I)^2 + 4I$ är injektiv. (4 p)

7. T är en linjär operator på ett 3-dimensionellt vektorrum V med minimalpolynom $\phi_T(t) = (t - 1)^2(t + 3)$. Vilka av följande påståenden är sanna? Motivera!

   (i) $\mathcal{N}(T - I) \cap \mathcal{N}(T + 3I) = \{0\}$.
   (ii) $\mathcal{N}((T - I)^2) \cap \mathcal{N}(T + 3I) = \{0\}$.
   (iii) $\mathcal{N}(T - I) + \mathcal{N}(T + 3I) = V$.
   (iv) $\mathcal{N}((T - I)^2) + \mathcal{N}(T + 3I) = V$.
   (v) T är diagonaliserbar.
   (vi) $\dim \mathcal{V}(T - I) = 2$. (6 p)

8. Låt T vara operatorn på $\mathbf{C}^4$ med matrisen

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

med avseende på standardbasen.

   (a) Bestäm operatorns karakteristiska polynom och operatorns minimalpolynom.
   (b) Bestäm en Jordans normalform för operatorn T samt en Jordanbas. (6 p)