UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Inger Sigstam, 471 3223

Dugga
LINJÄR ALGEBRA OCH GEOMETRI 1
2007-10-02

Skrivtid: 10.00—12.00. Inga hjälpmedel. Lösningarna skall vara försedda med förklarande text. Varje uppgift ger högst 5 poäng.

Del 1

1. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + 2y - z = b_1 \\ 4x + 7y - 4z = b_2 \\ 2x + 5y - 4z = b_3 \end{cases}$$

för följande värden på högerleden:

a) $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

2. Finn tal a_1, a_2 och a_3 så att systemet

$$\begin{cases} x + 3y - z = b_1 \\ 2x + 10y - 4z = b_2 \\ 3x + y + z = b_3 \end{cases}$$

är lösbart (dvs. har minst en lösning) om och endast om $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$.

Del 2

3. Låt $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$.

   a) Finn elementära matriser E_1, E_2 och E_3 så att $E_3E_2E_1A = I$.

   b) Skriv A som en produkt av elementära matriser.

4. Låt $A = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 6 \\ 1 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

   a) Beräkna $\det(A)$.

   b) Beräkna kofaktormatrisen C till A.

   c) Ange den adjungerade matrisen $\operatorname{adj}(A)$.

   d) Ange A^{-1}.

SVAR

1. $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 0 & -1 & -2 \\ 4 & 7 & -4 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & -1 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 7 & 12 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 4 & 7 \end{array}\right) \sim$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -7 & -12 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 11 & 19 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5/2 & 15/2 & 25/2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -7 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & -3/2 & -11/2 & -19/2 \end{array}\right)$

SVAR: a) $x = 5/2$, $y = -2$, $z = -3/2$. b) $x = 15/2$, $y = -7$, $z = -11/2$.
c) $x = 25/2$, $y = -12$, $z = -19/2$.

2. $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & b_1 \\ 2 & 10 & -4 & b_2 \\ 3 & 1 & 1 & b_3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & b_1 \\ 0 & 4 & -2 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & -8 & 4 & b_3 - 3b_1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & b_1 \\ 0 & 4 & -2 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 + 2b_2 - 7b_1 \end{array}\right)$

Systemet är lösbart om och endast om $b_3 + 2b_2 - 7b_1 = 0$. Vi kan alltså välja $a_1 = -7$, $a_2 = 2$ och $a_3 = 1$.
SVAR: $a_1 = -7$, $a_2 = 2$ och $a_3 = 1$.

3. a) Vi har $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Operationen [Rad 2 − 2 rad 1] motsvaras av den elementära matrisen $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. Operationen [Rad 1 + 5 rad 2] motsvaras av $E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Operationen [multiplicera rad 2 med −1] motsvaras av $E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Vi har nu $E_3E_2E_1A = I$.
SVAR: $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ och $E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
b) Multiplicera likheten ovan från vänster, först med E_3^{-1}, därefter med E_2^{-1}, och slutligen med E_1^{-1}. Då får man $A = E_1^{-1}E_2^{-1}E_3^{-1}I = E_1^{-1}E_2^{-1}E_3^{-1}$. Kvar bestämma dessa inverser: $E_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $E_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ och $E_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

4. a) Med Sarrus regel får man $\det(A) = 0+70+18-0-120-28 = -60$. b) Minorerna:

$M_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -15, \quad M_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -6, \quad M_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3$

$M_{21} = \begin{vmatrix} 7 & 6 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 10, \quad M_{22} = \begin{vmatrix} 8 & 6 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 20, \quad M_{23} = \begin{vmatrix} 8 & 7 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 10$

$M_{31} = \begin{vmatrix} 7 & 6 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 35, \quad M_{32} = \begin{vmatrix} 8 & 6 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 34, \quad M_{33} = \begin{vmatrix} 8 & 7 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -7.$

Kofaktormatrisen C blir $C = \begin{pmatrix} M_{11} & -M_{12} & M_{13} \\ -M_{21} & M_{22} & -M_{23} \\ M_{31} & -M_{32} & M_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 & 6 & 3 \\ -10 & 20 & -10 \\ 35 & -34 & -7 \end{pmatrix}$.

c) Den adjungerade matrisen $\operatorname{adj}(A)$ är $\operatorname{adj}(A) = C^T = \begin{pmatrix} -15 & -10 & 35 \\ 6 & 20 & -34 \\ 3 & -10 & -7 \end{pmatrix}$.

d) $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}\operatorname{adj}(A) = \dfrac{-1}{60}\begin{pmatrix} -15 & -10 & 35 \\ 6 & 20 & -34 \\ 3 & -10 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/6 & -7/12 \\ -1/10 & -1/3 & 17/30 \\ -1/20 & 1/6 & 7/60 \end{pmatrix}$.