UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Inger Sigstam, 471 3223

Dugga
LINJÄR ALGEBRA OCH GEOMETRI 1
2008-10-09

Skrivtid: 9.00—11.00. Inga hjälpmedel. Lösningarna skall vara försedda med förklarande text. Varje uppgift ger högst 5 poäng.

1. Lös följande ekvationssystem, samt tolka både ekvationssystemet och resultatet geometriskt.
$$\begin{cases} x+y+z &= 3 \\ 2x-y-z &= 0 \\ 4x+y+z &= 6. \end{cases}$$

2. En triangel har sina hörn i punkterna $A=(1,0,2)$, $B=(0,-2,3)$ och $C=(5,2,4)$.

   a) Beräkna $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$.

   b) Bestäm ekvationen (på formen $\alpha x + \beta y + \gamma z = D$) för det plan som innehåller triangeln.

   c) Bestäm triangelns area.

3. Linjen $\mathcal{L}$ är parallell med vektorn $\overrightarrow{a}=(3,0,1)$ och går genom punkten $A=(1,-2,1)$. Låt $P=(8,9,10)$ vara en punkt.

   a) Beräkna den ortogonala projektionen $\mathrm{proj}_{\overrightarrow{a}}(\overrightarrow{AP})$ av vektorn $\overrightarrow{AP}$ på riktningen $\overrightarrow{a}$.

   b) Vilken punkt på linjen ligger närmast P?

   c) Bestäm det kortaste avståndet mellan punkten P och linjen $\mathcal{L}$.

4. a) Visa att vektorerna $\overrightarrow{v_1}=(1,2,1)$, $\overrightarrow{v_2}=(2,1,-1)$, $\overrightarrow{v_3}=(1,3,1)$ är linjärt oberoende.

   b) Låt $\overrightarrow{u}=(1,2,3)$.
   Bestäm talen λ_1, λ_2 och λ_3 så att $\overrightarrow{u}=\lambda_1\overrightarrow{v_1}+\lambda_2\overrightarrow{v_2}+\lambda_3\overrightarrow{v_3}$.

LYCKA TILL !

SVAR dugga 9 okt 2008.

1. $\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -3 & -6 \\ 0 & -3 & -3 & -6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

   SVAR: Alla lösningar: $(x, y, z) = (1, 2, 0) + t(0, -1, 1)$, $t \in \mathbf{R}$. Lösningsmängden är en rät linje som är skärningslinjen av de tre planen som bestäms av ekvationerna i det givna systemet.

2. a) $\overrightarrow{AB} = (-1, -2, 1)$ och $\overrightarrow{AC} = (4, 2, 2)$. $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-6, 6, 6)$.
   b) Som normal kan vi använda $\overrightarrow{n} = (1, -1, -1)$. Planets ekvation blir $1(x-1) - 1(y-0) - 1(z-2)$, som förenklas till: $x - y - z = -1$.
   c) Triangeln är halva den parallellogram som spänns upp av $\overrightarrow{AB}$ och $\overrightarrow{AC}$. Därför är dess area lika med

$$\frac{1}{2}||\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|| = \frac{1}{2}||6(-1, 1, 1)|| = 3\sqrt{3}.$$

3. a) $\mathrm{proj}_{\overrightarrow{a}}(\overrightarrow{AP}) = \dfrac{(3,0,1) \bullet (7,11,9)}{(3,0,1) \bullet (3,0,1)}(3, 0, 1) = (9, 0, 3)$.
   b) Den närmsta punkten är $Q = (x, y, z)$ så att $\overrightarrow{AQ} = \mathrm{proj}_{\overrightarrow{a}}(\overrightarrow{AP}) = (9, 0, 3)$. Vi får $(x - 1, y + 2, z - 1) = (9, 0, 3)$ vilket ger $Q = (10, -2, 4)$.
   c) Avståndet är $||\overrightarrow{PQ}|| = \sqrt{161}$.

4. a) Visa att ekvationssystemet $\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$ med obekanta $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ endast har den triviala lösningen $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.
   b) Lös ekvationssystemet $\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right)$ med obekanta $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Man finner $\lambda_1 = \dfrac{13}{3}$, $\lambda_2 = -\dfrac{2}{3}$ och $\lambda_3 = -2$. Alltså är $\overrightarrow{u} = \dfrac{13}{3}\overrightarrow{v_1} - \dfrac{2}{3}\overrightarrow{v_2} - 2\overrightarrow{v_3}$.