**UPPSALA UNIVERSITET**
**Matematiska institutionen**
E. Ekström,
I. Sigstam

Prov i matematik
ES, KandMa, KandFy,
Lärare, Fristående kurs

Linjär algebra o geometri 1
2009–01–08

*Skrivtid: 8.00 – 13.00. Inga hjälpmedel tillåtna. Varje uppgift är värd 5 poäng. För betygen 3, 4, 5 krävs minst 18, 25 resp 32 poäng. Lösningarna skall åtföljas av förklarande text.*

**1.** Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 - 3x_5 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + 5x_5 = -3 \\ -3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 + 8x_5 = -6 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_5 = 1 \end{cases}$$

**2.** a) Bestäm inversen till matrisen $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Lös matrisekvationen

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

**3.** Lös ekvationen

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & x \\ -1 & 2 & x & 1 \\ 1 & x & 2 & -1 \\ x & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

**4.** Låt $\Pi$ vara planet $3x + y - z = 2$.

a) Betrakta punkterna $A = (1, 1, 2)$ och $B = (3, 1, 1)$. Bestäm den ortogonala projektionen av $\overrightarrow{AB}$ på planets normalriktning.

b) Skriv vektorn $\overrightarrow{AB}$ som en summa $\overrightarrow{AB} = \vec{u} + \vec{v}$, där $\vec{u}$ är parallell med planet $\Pi$ och $\vec{v}$ är ortogonal mot $\Pi$.

**5.** Ange för vilka värden på den reella konstanten $a$ som ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + (a-3)y + z = a-2 \\ 2x - y + (a+1)z = -3 \\ ax + (a-2)y + z = a+1 \end{cases}$$

(i) saknar lösning,

(ii) har oändligt många lösningar,

(iii) har en unik lösning. (Observera att ekvationssystemet inte behöver lösas.)

**6.** Avgör för vilka reella tal $a$ som planet $ax + 2y + z = 2$ är parallellt med linjen

$$l : \begin{cases} 2x + 2y + z = 4 \\ x + 2y + 4z = 1. \end{cases}$$

**7.** Låt $l_1$ vara linjen $(x, y, z) = (1 + 2t, 1 - t, 2 + t)$, $t \in \mathbb{R}$, och låt $l_2$ vara linjen $(x, y, z) = (1 + r, 1 + r, 2 + r)$, $r \in \mathbb{R}$.

a) Bestäm ekvationen för det plan som innehåller de båda linjerna $l_1$ och $l_2$.

b) Bestäm avståndet mellan punkten $P = (1, 3, 2)$ och planet i a).

**8.** Låt $F$ och $G$ vara följande linjära operatorer på $\mathbb{R}^2$. $F$ är reflektion med avseende på $x$-axeln, och $G$ är rotation moturs med vinkeln $\pi/2$.

a) Bestäm matrisen för $F$ och matrisen för $G$.

b) Bestäm matrisen för den sammansatta avbildningen $F \circ G$, och bestäm $(F \circ G)(2, 1)$.

**Svar till tentamen i**
**Linjär algebra o geometri 1 2009–01–08**

**1.** $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (1 - s, -1 - 2s - 3t, s, t, t),\ s, t \in \mathbf{R}$.

**2.** Inversen är $A^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, och $X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \\ 6 & -8 \end{pmatrix}$.

**3.** Rötterna är $x_1 = 0,\ x_2 = x_3 = -2,\ x_4 = 4$.

**4.** a) Normalriktningen är $\vec{n} = (3, 1, -1)$, och $\overrightarrow{AB} = (2, 0, -1)$.
Den ortogonala projektionen är $\dfrac{7}{11}(3, 1, -1)$.
b) $\vec{u} = \dfrac{1}{11}(1, -7, -4)$ och $\vec{v} = \dfrac{7}{11}(3, 1, -1)$.

**5.** $a = -1$: oändligt många lösningar.
$a = 1, 3$: lösning saknas.
$a \neq -1, 1, 3$: entydig lösning.

**6.** $a = 2$

**7.** a) $2x + y - 3z + 3 = 0$
b) $\sqrt{2/7}$

**8.** a) $[F] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ och $[G] = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
b) $[F \circ G] = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ och $(F \circ G)(2, 1) = (-1, -2)$