UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Ryszard Rubinsztein
Jörgen Östensson

Prov i matematik
Civilingenjörsprogrammen
IT, K, STS, W
Kandidatprogrammen
KandDv och Kemikand
LINJÄR ALGEBRA
och GEOMETRI I
2009–04–17

Skrivtid: 8.00 – 13.00. Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon. Lösningarna skall vara försedda med motiveringar. Varje korrekt löst uppgift ger högst 5 poäng. För betygen 3, 4, 5 krävs minst 18, 25 respektive 32 poäng.

1. Linjen l_1 ges av

$$l_1 \ : \ (x,y,z) = (1,0,2) + s(1,2,1), \ \ s \in \mathbb{R},$$

medan l_2 är skärningslinjen mellan planen $x + y - z = 1$ och $2x + y + z = 9$. Avgör om linjerna l_1 och l_2 skär varandra och bestäm isåfall koordinaterna för skärningspunkten.

2. Lös matrisekvationen

$$AX^{-1} + B = C,$$

där

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

3. Lös ekvationen

$$\begin{vmatrix} x & 1 & x & x \\ 1 & x & x & x \\ 2 & x & 4 & 2x \\ x & 2 & x & x \end{vmatrix} = 0.$$

4. Givna är fyra punkter: $A = (1,0,2)$, $B = (2,1,1)$, $C = (-1,1,0)$ medan punkten D ligger på linjen $l \ : \ (x,y,z) = (t, 2-t, -t)$, $t \in \mathbb{R}$. Bestäm punkten D så att volymen av parallellepipeden (”lådan”) som spänns upp av vektorerna $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, och $\overrightarrow{AD}$ är lika med 1.

5. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 1 \\ 2x + y + (a-1)z = 3 \\ -x + (a-3)y - z = -2 \end{cases}$$

för alla värden på den reella konstanten a.

Var god vänd!

6. Låt $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara den ortogonala projektionen av rummets vektorer på linjen $l : (x, y, z) = (-t, t, t),\ \ t \in \mathbb{R}$. Finn T:s standardmatris $[T]$.

7. Bestäm avståndet mellan linjen $l_1 :\ (x, y, z) = (3 + t,\ 1 + t,\ 2 - 2t),\ \ t \in \mathbb{R},$ och linjen

$$l_2 : \begin{cases} x + z = 0 \\ y = 3. \end{cases}$$

8. (a) Visa att vektorerna

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

utgör en bas för $\mathbb{R}^4$.

(b) Finn koordinaterna för vektorn

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

i denna bas.

LYCKA TILL!

Svar till tentamen i LINJÄR ALGEBRA och GEOMETRI I 2009–04–17

1. Ja, linjerna skär varandra. Skärningspunkten är $P = (2, 2, 3)$.

2.

$$X = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. $x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = 2$.

4. $D = (\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$ eller $D = (\frac{1}{4}, \frac{7}{4}, -\frac{1}{4})$.

5. $a \neq 2, 4:$ $\quad (x, y, z) = (1,\ -\frac{1}{a-2},\ \frac{1}{a-2})$,
$a = 2:$ $\quad$ inga lösningar,
$a = 4:$ $\quad (x, y, z) = (3 + 4t,\ t,\ -1 - 3t),\ t \in \mathbb{R}$.

6.

$$[T] = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. $\sqrt{3}$.

8. (b) $\vec{v} = 2\vec{u}_1 - \vec{u}_2 + 3\vec{u}_3 + \vec{u}_4$.