UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Erik Ekström
Ryszard Rubinsztein
Inger Sigstam
Jörgen Östensson

Prov i matematik
Civilingenjörsprogrammen
ES, IT, K, STS, W
Kandidatprogrammen
KandDv, Kemikand, KandFy och KandMa,
Fristående
LINJÄR ALGEBRA
och GEOMETRI I
2009–08–18

Skrivtid: 9.00 – 14.00. Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon. Lösningarna skall vara försedda med motiveringar. Varje korrekt löst uppgift ger högst 5 poäng. För betygen 3, 4, 5 krävs minst 18, 25 respektive 32 poäng.

1. Bestäm konstanten A så att planet $x + 2y + Az = 2$ skärs vinkelrätt av linjen

$$l : \begin{cases} x - y + 2z = 2 \\ 4x - 3y + 4z = 9. \end{cases}$$

2. Låt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestäm C^{-1}.
(b) Finn den matris X som uppfyller ekvationen

$$AX^{-1}B = C.$$

3. Lös ekvationen

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x & 2 \\ x & 1 & 2 & x \\ x & 2 & 1 & x \\ 2 & x & x & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

4. Punkten $P = (2, 1, 4)$ speglas i planet $\pi : x - 2y + 2z + 1 = 0$. Bestäm koordinaterna för punktens spegelbild.

5. Bestäm de värden på den reella konstanten a för vilka ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2x + (a+6)y + (3a+7)z = 10 + 3a \\ x + 2y + 2z = 3 \\ -2x + (a-2)y + (4a-2)z = 4a - 2 \end{cases}$$

har oändligt många lösningar. Finn även lösningarna för dessa värden på a.

Var god vänd!

6. En triangel har två av sina hörn i punkterna $A = (1, 0, 1)$ och $B = (3, 0, 0)$. Det tredje hörnet C ligger på linjen

$$l \; : \; (x, y, z) = (1, 2, 3) + t(0, 1, 1), \;\; t \in \mathbb{R}.$$

Bestäm alla möjliga C för vilka triangelns area blir lika med 1.

7. Låt $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ vara den linjära avbildning som avbildar vektorn $(1, 0, 1)$ på vektorn $(1, 2)$, vektorn $(1, 1, 0)$ på vektorn $(1, -1)$, samt vektorn $(0, 1, 1)$ på vektorn $(3, -2)$.

Finn T:s standardmatris $[T]$.

8. Låt A och B vara kvadratiska matriser sådana att

$$A^2 + AB = I,$$

där I betecknar identitetsmatrisen.
(a) Visa att matrisen A är inverterbar.
(b) Visa att $AB = BA$.

LYCKA TILL!

Svar till tentamen i LINJÄR ALGEBRA och GEOMETRI I 2009–08–18

1. $A = \frac{1}{2}$.

2.

$$(a) \quad C^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$(b) \quad X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. $x = \pm\sqrt{2}$.

4. $P' = (0, 5, 0)$.

5. $a = -2: \quad (x, y, z) = (\frac{5}{3} - 2t,\ t,\ \frac{2}{3}),\ t \in \mathbb{R}$.

6. $C = (1, \frac{2}{3}, \frac{5}{3})$ eller $C = (1, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$.

7.

$$[T] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 3 & -5 & 1 \end{pmatrix}.$$