UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Thomas Kragh,
Ryszard Rubinsztein

Prov i matematik

K1, STS1, W1, X1, Frist,
KemiKand1, Lärarma1

LINJÄR ALGEBRA
och GEOMETRI I
2012–12–19

Skrivtid: 8.00 – 13.00. Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon. Lösningarna skall vara försedda med motiveringar. Varje korrekt löst uppgift ger högst 5 poäng. För betygen 3, 4, 5 krävs minst 18, 25 respektive 32 poäng.

1. (**Obs:** denna uppgift löses **inte** om man har klarat duggan!)

Lös det linjära ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 3 \\ 3x_1 + 2x_2 + 8x_3 + 5x_4 = 11 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 = c \\ 4x_1 + x_2 + 14x_3 + 5x_4 = 18 \end{cases}$$

för alla värden på den reella konstanten $c \in \mathbb{R}$.

2. Låt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Finn matrisen X som uppfyller ekvationen

$$A + AXB = AC.$$

3. Lös ekvationen

$$\begin{vmatrix} x & 1 & x & 2 & x \\ 1 & x & 2 & x & x \\ x & 2 & x & 1 & x \\ 2 & x & 1 & x & x \\ x & x & x & x & x \end{vmatrix} = 0\,.$$

4. Find de värden på den reella konstanten A så att skärningslinjen mellan planen

$$\pi_1 \,:\, x + 2y + Az = 1 \qquad \text{och} \qquad \pi_2 \,:\, 2x - y + z = 2$$

är parallell med linjen $k \,:\, (x, y, z) = (1 + t, -t, 1 - 3t),\ t \in \mathbb{R}.$ (ON-system)

Var god vänd!

5. De tre linjerna

$$\begin{array}{ll} l_1 & : (x,y,z) = (1+s, 2-s, 2s), \qquad s \in \mathbb{R}, \\ l_2 & : (x,y,z) = (2+t, 1+t, 2+t), \quad t \in \mathbb{R} \qquad \text{och} \\ l_3 & : \begin{cases} 3x+y-3 & = & 0 \\ 3x-z-2 & = & 0 \end{cases} \end{array}$$

skär varandra två och två. Beräkna arean av den triangel som har hörnen i de tre skärningspunkterna. (ON-system)

6. Låt $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara speglingen av rymdens vektorer i planet $\pi_1 : x - 2y + z = 0$.

(a) Finn standardmatrisen $[S]$.

(b) Finn ekvationen för spegelbilden av planet $\pi_2 : x - y + z = 1$ under speglingen S.

(ON-system)

7. (a) Ge definitionen av en bas i R^n.

(b) Avgör om vektorerna $\vec{u}_1 = (1,7), \vec{u}_2 = (-2,3), \vec{u}_3 = (0,1),$ utgör en bas i $\mathbb{R}^2$. Om så är fallet finn koordinaterna för vektorn $\vec{v} = (-1,1)$ i denna bas.

(c) Avgör om vektorerna $\vec{u}_1 = (1,0,-1,1), \vec{u}_2 = (1,1,0,2), \vec{u}_3 = (2,0,1,1), \vec{u}_4 = (1,0,0,1)$ utgör en bas i $\mathbb{R}^4$. Om så är fallet finn koordinaterna för vektorn $\vec{v} = (-2,2,-4,3)$ i denna bas.

8. Den linjära avbildning $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ som har standardmatrisen

$$[F] = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

kan geometriskt tolkas som en vridning av rummet med en vinkel θ kring en linje (en axel) genom origo.

(a) Finn en parameterekvation för vridningsaxeln.

(b) Finn vridningsvinkeln θ

(Ev: glöm inte att ange vektorn från spetsen av vilken ser man vridningen med vinkeln θ när blicken är riktad mot origo).

(Ev: glöm inte att ange en punkt från vilken man ser vridningen med vinkeln θ när blicken är riktad mot origo).

(Ev: glöm inte att ange den precise rotations riktning genom att ange en punkt från vilken man ser vridningen med vinkeln θ när blicken är riktad mot origo).

(pos.orient. ON-system)

LYCKA TILL!

GOD JUL och GOTT NYTT ÅR!

Svar till tentamen i
LINJÄR ALGEBRA
och GEOMETRI I 2012–12–19

1. $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (5 - 4s - t,\ -2 + 2s - t,\ s,\ t),\ s, t \in \mathbb{R}$ när $c = -1$.
Inga lösningar när $c \neq -1$.

2.

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Rötter: $x_1 = 0,\ x_2 = x_3 = \dfrac{3}{2}$.

4. $A = -\dfrac{1}{3}$

5. $\sqrt{14}$

6. (a)

$$[S] = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix},$$

(b) $S(\pi_2)\ :\ x - 5y + z = -3$.

7. (a) Nej, $\vec{u}_1,\ \vec{u}_2,\ \vec{u}_3,$ utgör inte en bas i $\mathbb{R}^2$.
(c) Ja, $\vec{u}_1,\ \vec{u}_2,\ \vec{u}_3,\ \vec{u}_4$ utgör en bas i $\mathbb{R}^4$. Koordinaterna för $\vec{v}$ i denna bas är $(1, 2, -3, 1)$.

8. (a) Vridningsaxeln: $l\ :\ (x, y, z) = (s, s, -s),\ s \in \mathbb{R}$.
(b) Vridningsvinkeln: $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ moturs sett från spetsen av vektorn $(1, 1, -1)$.