UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Gunnar Berg,
Thomas Kragh,
Ryszard Rubinsztein

Prov i matematik

ES1, Geokand, GrundlärMa,
gylärarma1, IT1, K1, KandDv1,
KandKe1, KandMa1, Lärarmat,
MatemA, STS1, W1, X1

LINJÄR ALGEBRA
och GEOMETRI I
2013–08–29

Skrivtid: 8.00 – 13.00. Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon. Lösningarna skall vara försedda med motiveringar. Varje korrekt löst uppgift ger högst 5 poäng. För betygen 3, 4, 5 krävs minst 18, 25 respektive 32 poäng.

1. Lös det linjära ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ 4x_1 \qquad\quad + 2x_3 + 2x_4 = c \end{cases}$$

för alla värden på $c \in \mathbb{R}$.

2. Låt

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{och} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Finn alla matriser X som uppfyller ekvationen

$$AX^{-1}B = I.$$

3. Lös ekvationen

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 1 & x & 0 \\ 1 & x & x & 0 & 1 \\ 1 & 0 & x & 1 & 0 \\ x & 1 & 0 & 1 & x \\ 1 & 0 & 1 & x & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

4. Ett plan π är vinkelrätt mot planet $x + 2y - z + 1 = 0$ och skärningslinjen mellan dessa två plan innehåller punkterna $P = (2, 1, 5)$ och $Q = (1, -1, 0)$. Bestäm ekvationen för planet π. (ON-system)

5. En tetraeder (en pyramid med en triangel som botten) har hörnen

$$A = (2, 0, 1), \quad B = (-1, 3, 5), \quad C = (1, 0, 0) \quad \text{och} \quad D = (-5, -4, 7).$$

Finn ekvationen för det plan som innehållet punkterna A, B och C och bestäm den punkt där höjden från D skär detta plan. (ON-system)

6. Låt $G\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara den linjära avibildning som avbildar vektorn $\vec{u}_1 = (1, 1, 0)$ på vektorn $\vec{v}_1 = (-1, 0, 1)$, avbildar vektorn $\vec{u}_2 = (1, 0, 1)$ på vektorn $\vec{v}_2 = (3, 1, 1)$ och avbildar vektorn $\vec{u}_3 = (0, 1, 1)$ på vektorn $\vec{v}_3 = (1, 0, 2)$.

(a) Finn G:s standardmatris $[G]$.

(b) Finn bilden av vektorn $\vec{w} = (1, 2, 3)$.

7. Låt

$$\vec{u}_1 = (1, 2, 3), \quad \vec{u}_2 = (2, 3, 4) \quad \text{och} \quad \vec{u}_3 = (3, 4, 5)$$

vara tre vektorer i $\mathbb{R}^3$.

(a) Avgör om vektorerna $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ och $\vec{u}_3$ är linjärt beroende eller linjärt oberoende.

(b) För vilka värden av $a \in \mathbb{R}$ tillhör vektorn $\vec{v} = (-2, -4, a)$ det linjära höljet $\operatorname{span}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ av vektorerna $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ och $\vec{u}_3$?

8. Visa att för alla vektorer $\vec{u}$ och $\vec{v}$ i $\mathbb{R}^n$ gäller

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 + \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 2\|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{v}\|^2$$

(denna identitet kallas för parallellogramlagen).

LYCKA TILL!

Svar till tentamen i
LINJÄR ALGEBRA
och GEOMETRI I 2013–08–29

1. Inga lösningar för $c \neq 8$.

För $c = 8$ är lösningarna $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2 - \frac{s}{2} - \frac{t}{2}, -2 - s, s, t), \quad s, t \in \mathbb{R}$.

2. $X = BA = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 2 & 7 & 5 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

3. $x_{1,2,3} = 1$ och $x_{4,5} = -1$.

4. $2x - y - 3 = 0$.

5. Ekvationen för planen är $-3x - 7y + 3z = -3$. Den närmaste punkten är $(-2, 3, 4)$.

6. $[G] = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ och $G(\overrightarrow{w}) = (5, 1, 5)$.

7. (a) Linjärt beroende. (b) $a = -6$.

8.
$$\begin{aligned} \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 + \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 &= \langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{u} + \vec{v} \rangle + \langle \vec{u} - \vec{v}, \vec{u} - \vec{v} \rangle = \\ &= \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle + 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle - 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \\ &= 2\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle + 2\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = \\ &= 2\|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{v}\|^2. \end{aligned}$$