UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska Institutionen
Jens Fjelstad

2014-03-17
1MA025

Tentamen – Linjär algebra och geometri 1

Skrivtid: 14:00-19:00. Tillåtna hjälpmedel: skrivdon. Varje korrekt löst uppgift ger högst 5 poäng. För betyg 3 krävs minst 18 p, för betyg 4 krävs minst 25 p, och för betyg 5 krävs minst 32 p. Lösningarna skall vara väl motiverade. **Lycka till!**

1. (ej nödvändig att lösa om man är godkänd på duggan)
Lös det linjära ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 5x_3 - x_4 = 3 \\ -x_1 - 2x_2 + 7x_3 + (b+1)x_4 = -3 \\ 3x_1 + 6x_2 + (b-15)x_3 = 9 \end{cases}$$

för alla $b \in \mathbb{R}$. (5p)

2. Låt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Bestäm alla matriser X som uppfyller ekvationen

$$X + AX = B$$ (5p)

3. Lös ekvationen

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2x & -1 \\ 2 & x+3 & 2x & -1 \\ 2-x & 3 & 3x & 0 \\ 0 & 3 & 2x+2 & x-1 \end{vmatrix} = 0$$ (5p)

4. Låt A, B, och C vara punkterna

$$A : (1, -1, -2), \quad B : (2, 1, 1), \quad C : (3, 0, 0).$$

(a) Beräkna arean av triangeln med hörn A, B, och C (3p)

(b) Finn en punkt D sådan att A, B, C, och D är hörnen i ett parallellogram (observera att det finns fler än en sådan punkt, det räcker att välja en) (2p)

5. Betrakta punkten $P : (1, 4, 2)$ och planet

$$\pi : x - y + 7z = 2.$$

Beräkna avståndet mellan P och π, och bestäm koordinaterna för den punkten på π som ligger närmast P (5p)

6. Definiera

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

dvs $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \in \mathbb{R}^4$.

(a) Avgör om $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ är linjärt oberoende, samt om $\vec{w} \in \text{Span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$, där

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \\ -13 \end{pmatrix}$$ (3p)

(b) Ge definitionen på en bas för $\mathbb{R}^n$, samt avgör om $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{u})$ bildar en bas för $\mathbb{R}^4$ där

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$$ (2p)

7. Låt $S, T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara två linjära avbildningar definierade enligt

$$S(x, y) = (-y, x), \quad T(x, y) = (x + y, y)$$

(a) Bestäm standardmatriserna $[S]$ och $[T]$ för S respektive T (2p)

(b) Bestäm de sammansatta avbildningarna $S \circ T$ och $T \circ S$ (2p)

(c) Avgör om T är inverterbar (1p)

8. Låt

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestäm alla egenvärden till A, samt en egenvektor $\neq \vec{0}$ till varje egenvärde (5p)

Lösningar:

1. Gauss-Jordanelimination:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -5 & -1 & 3 \\ -1 & -2 & 7 & b+1 & -3 \\ 3 & 6 & b-15 & 0 & 9 \end{array}\right) \; 1 \quad -3 \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -5 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & b & 0 \\ 0 & 0 & b & 3 & 0 \end{array}\right) \; \tfrac{1}{2} \quad -b$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -5 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & b/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{6-b^2}{2} & 0 \end{array}\right)$$

Vi ser att rangen beror på huruvida $b^2 = 6$ eller inte. Antag först att $b^2 - 6 = 0$, dvs $b = \pm\sqrt{6}$, vilket leder till matrisen

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -5 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & \pm\sqrt{\frac{3}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \; 5 \quad \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 \pm 5\sqrt{\frac{3}{2}} & 3 \\ 0 & 0 & 1 & \pm\sqrt{\frac{3}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Det finns ∞ många lösningar. Den allmäna lösningen tar formen

$$(x_1, x_2, x_3, x4) = (3 - 2s - (-1 \pm 5\sqrt{\frac{3}{2}})t, s, \mp\sqrt{\frac{3}{2}}t, t), \; s, t \in \mathbb{R}$$

Antag härnäst att $b^2 - 6 \neq 0$. Då får vi istället matrisen

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -5 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & b/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{6-b^2}{2} & 0 \end{array}\right) \; \frac{2}{6-b^2} \quad -\frac{b}{2} \quad 1 \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -5 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \; 5 \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Vi läser av den allmäna lösningen

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (3 - 2t, t, 0, 0), \; t \in \mathbb{R}$$

2. Lös först ut X:

$$X + AX = B$$
$$\Leftrightarrow$$
$$(I + A)X = B$$
$$\Leftrightarrow$$
$$X = (I + A)^{-1}B$$

Vi har

$$I + A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Använd t.ex. Jacobis metod för att invertera matrisen.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad -2 \quad -2 \quad \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right) \quad -2 \quad \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

dvs vi har

$$(A+I)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Slutligen kan vi beräkna

$$X = (A+I)^{-1}B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

3. Beräkna determinanten:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2x & -1 \\ 2 & x+3 & 2x & -1 \\ 2-x & 3 & 3x & 0 \\ 0 & 3 & 2x+2 & x-1 \end{vmatrix} \quad 1 \quad = \begin{vmatrix} 2(x+1) & 3 & 2x & -1 \\ 2(x+1) & x+3 & 2x & -1 \\ 2(x+1) & 3 & 3x & 0 \\ 2(x+1) & 3 & 2x+2 & x-1 \end{vmatrix}$$

$$= 2(x+1) \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2x & -1 \\ 1 & x+3 & 2x & -1 \\ 1 & 3 & 3x & 0 \\ 1 & 3 & 2x+2 & x-1 \end{vmatrix} \quad -1 \quad = 2(x+1) \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2x & -1 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 1 \\ 0 & 0 & 2 & x \end{vmatrix}$$

$$\overset{K1}{=} 2(x+1) \begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 \\ 0 & 2 & x \end{vmatrix} \overset{\text{Sarrus}}{=} 2x(x+1)(x^2-2)$$

Ekvationen lyder således

$$2x(x+1)(x^2-2) = 0,$$

vilken har lösningarna

$$x = 0, -1, \pm\sqrt{2}.$$

4. (a) Arean av den sökta triangeln är hälften av arean hos parallellogrammet som spänns av två vektorer som bildar närliggande sidor i triangeln, t.ex. $\overrightarrow{AB}$ och $\overrightarrow{AC}$. Arean hos detta parallellogram ges dessutom av $\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\|$. Vi får

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= (1, 2, 3) \\ \overrightarrow{AC} &= (2, 1, 2) \\ \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} &= (1, 4, -3) \end{aligned}$$

Slutligen:

$$\text{sökt area } = \frac{1}{2}\|(1, 4, -3)\| = \frac{1}{2}\sqrt{1 + 16 + 9} = \frac{\sqrt{26}}{2} = \sqrt{\frac{13}{2}}$$

(b) Ett exempel på en sådan punkt D får vi om vi med utgångspunkt i A följer först vektorn $\overrightarrow{AB}$ och därefter följer vektorn $\overrightarrow{AC}$, eller med andra ord, om vi med utgångspunkt i B följer vektorn $\overrightarrow{AC}$. Koordinaterna för slutpunkten ges då av

$$(2, 1, 1) + \overrightarrow{AC} = (2, 1, 1) + (2, 1, 2) = (4, 2, 3).$$

5. Från ekvationen som definierar planet ser vi att vektorn $\vec{n} = (1, -1, 7)$ är normal mot planet π. Vidare är det enkelt att se att t.ex. punkten $Q : (2, 0, 0)$ ligger i π. Låt A vara punkten i π som ligger närmast P. Vi söker då dels $\|\overrightarrow{AP}\|$, och dels koordinaterna för A. Vi har

$$\overrightarrow{QP} = (1, 4, 2) - (2, 0, 0) = (-1, 4, 2)$$

och

$$\overrightarrow{AP} = \text{proj}_{\vec{n}}(\overrightarrow{QP}) = \frac{(-1, 4, 2) \cdot (1, -1, 7)}{1^2 + (-1)^2 + 7^2}(1, -1, 7) = \frac{9}{51}(1, -1, 7) = \frac{3}{17}(1, -1, 7).$$

Det följer att

$$\|\overrightarrow{AP}\| = \frac{3}{17}\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 7^2} = \frac{3}{17}\sqrt{51} = 3\sqrt{\frac{3}{17}}.$$

Koordinaterna för punkten A ges av

$$(1, 4, 2) - \overrightarrow{AP} = (1, 4, 2) - \frac{3}{17}(1, -1, 7) = (\frac{14}{17}, \frac{71}{17}, \frac{13}{17}) = \frac{1}{17}(14, 71, 13).$$

6. (a) Vi ska lösa två ekvationssystem, vilket vi gör simultant:

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 4 & -2 & 1 & 0 & -13 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ -1 \quad -4 \\ \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & 2 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \frac{1}{2} \\ \\ -1 \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ 2 \\ \quad -1 \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Vi har visat att $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, och $\vec{v}_3$ är linjärt oberoende (eftersom den enda linjärkombinationen av dem som är nollvektorn är den triviala kombinationen), samt att $\vec{w}$ inte tillhör spannet av samma tre vektorer (eftersom vi inte kan skriva $\vec{w}$ som en linjärkombination av dem).

(b) En bas för $\mathbb{R}^n$ består av en uppsättning vektorer i $\mathbb{R}^n$ som är linjärt oberoende och som spänner $\mathbb{R}^n$. Det följer att en bas för $\mathbb{R}^n$ är n st linjärt oberoende vektorer. Det räcker alltså att kolla om de fyra givna vektorerna är linjärt oberoende.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 8 & 0 \\ 4 & -2 & 1 & 9 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ -1 \quad -4 \\ \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & 0 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 8 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -23 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} \frac{1}{2} \\ \\ -1 \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -8 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -23 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ 2 \\ \quad -1 \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -19 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Med andra ord, den enda linjärkombinationen av vektorerna som är nollvektorn är den triviala linjärkombinatinen, och alltså bildar vektorerna $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$, samt $\vec{u}$ en bas för $\mathbb{R}^4$.

7. (a) Vi har

$$S\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+y\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},$$

dvs

$$[S]=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix},\quad [T]=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$$

(b) Vi vet att $[S\circ T]=[S][T]$, och $[T\circ S]=[T][S]$, så beräkna:

$$[S\circ T]=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1\\1&1\end{pmatrix}$$

Eftersom

$$\begin{pmatrix}0&-1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-y\\x+y\end{pmatrix}$$

så följer det att

$$(S\circ T)(x,y)=(-y,x+y).$$

På samma sätt beräknar vi:

$$[T\circ S]=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1\\1&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&-1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-y\\x\end{pmatrix},$$

så

$$(T\circ S)(x,y)=(x-y,x).$$

(c) T är inverterbar omm $[T]$ är inverterbar. Vi ser direkt (från t.ex. pilregeln) att $\det([T])=1$, så $[T]$ och T är därmed inverterbara. Även om det inte efterfrågades kan vi enkelt bestämma inversen till T:

$$[T]^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}\Rightarrow T^{-1}(x,y)=(x-y,y).$$

8. Egenvärdena till A är lösningarna till den karakteristiska ekvationen $\det(A-\lambda I)=0$.

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}3-\lambda&0&1\\0&1-\lambda&0\\3&2&1-\lambda\end{vmatrix}\overset{R2}{=}(1-\lambda)\begin{vmatrix}3-\lambda&1\\3&1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)\left((3-\lambda)(1-\lambda)-3\right)$$

$$=-\lambda(\lambda-1)(\lambda-4)$$

Vi läser av egenvärdena $\lambda=0,1,4$. För att bestämma egenvektorer ska vi hitta de icke-triviala lösningarna till de homogena ekvationssystemen $(A-\lambda I)\vec{x}=\vec{0}$, där vi ersätter λ med egenvärdena, ett efter ett.

$\underline{\lambda = 0}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad -1 \quad -2 \qquad \sim \qquad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Lösningarna ges som

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t/3 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}, \ t \in \mathbb{R}$$

och en egenvektor är t.ex.

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$\underline{\lambda = 1}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad -\frac{3}{2} \qquad \sim \qquad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vi läser av lösningarna:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t/2 \\ 3t/4 \\ t \end{pmatrix}, \ t \in \mathbb{R}$$

och ett exempel på en egenvektor är

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$\underline{\lambda = 4}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right) \quad 3 \quad \frac{2}{3} \qquad \sim \qquad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Lösningar:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ t \end{pmatrix}$$

Egenvektor t.ex.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$