UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Martin Herschend,
Thomas Kragh

Prov i matematik

K1, STS1, W1, X1, Frist,
KandKe1, Gylärarma1,

Linjär algebra
och geometri I
2014–04–23

Skrivtid: 14.00 – 19.00. Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon. Lösningarna skall vara försedda med motiveringar. Varje korrekt löst uppgift ger högst 5 poäng. För betygen 3, 4, 5 krävs minst 18, 25 respektive 32 poäng.

1. Lös det linjära ekvationssystemet

$$\begin{cases} \phantom{-3x_1 + 6x_2 +{}} 2x_3 + 2x_4 = c \\ 2x_1 - 4x_2 - x_3 + x_4 = -1 \\ -3x_1 + 6x_2 + 2x_3 - x_4 = 3 \end{cases}$$

för alla värden på $c \in \mathbb{R}$.

2. Låt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Finn alla matriser X som uppfyller ekvationen

$$AX = BA - X.$$

3. Lös ekvationen

$$\begin{vmatrix} 1 & x & 1 & x \\ x & 1 & x & 1 \\ 2x & -2 & x & 2 \\ 1 & 2x & 2 & x \end{vmatrix} = 0.$$

4. Bestäm speglingen av punkten $A\colon (1, 3, -3)$ i planet π som går genom origo och innehåller punkterna $(-1, 1, 1)$ och $(3, 3, 1)$.

5. Bestäm avståndet från punkten $P\colon (5, 1, 1)$ till linjen

$$l\colon \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}.$$

Finn även den punkt på linjen l som ligger närmast punkten P.

6. Låt $P\colon\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara ortogonal projektion på planet $\pi\colon\ 2x + y - z = 0$.

(a) Hitta P:s standardmatris $[P]$.

(b) Hitta bilden av linjen $l\colon\ (x, y, z) = (1, 0, 0) + t(1, 0, 2), t \in \mathbb{R}$ under P.

7. (a) Ge definitionen av en bas i $\mathbb{R}^n$.

Låt

$$\vec{u}_1 = (1, 0, 2), \quad \vec{u}_2 = (0, 3, 0), \quad \text{och} \quad \vec{u}_3 = (2, 1, 4)$$

(b) Avgör om dessa vektorer utgör en bas för $\mathbb{R}^3$.

(c) Om möjligt skriv $(1, 1, 1)$ som en linjär kombination av vektorerna $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$.

(d) Om möjligt skriv $(0, 1, 0)$ som en linjär kombination av vektorerna $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$.

8. Den linjära avbildning $T\colon\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ har standard matrisen:

$$[T] = \frac{1}{171}\begin{pmatrix} 122 & -77 & 7 \\ -77 & 50 & 11 \\ 7 & 11 & 170 \end{pmatrix}$$

(a) Visa att vektorn $\vec{v} = (-7, -11, 1)$ är en egenvektor till $[T]$ med egenvärde 0.

(b) Visa att avbildningen T är den ortogonala projektion i ett plan genom origo och hitta ekvationen för detta plan.

(**Obs:** man kan lösa (b) utan att göra väldigt många beräkningar, men motivera noggrant)

Lycka till!

Svar till tentamen i
Linjär algebra
och geometri I 2014–04–23

1. För $c \neq 6$ har vi inga lösningar.
För $c = 6$ har vi lösningarna: $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1 + 2s - t, s, 3 - t, t), \quad s, t \in \mathbb{R}$.

2. $X = (A+I)^{-1}BA = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & -4 \\ 1 & -4 & 3 \end{pmatrix}$.

3. $x \in \{\pm 1, \pm 2\}$.

4. Speglingen är $(3, -1, 3)$.

5.

(a) Avståndet: $\sqrt{14}$.

(b) Närmaste punkten: $(2, 0, -2)$

6.
(a)

$$[S] = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

(b) $[P](l)$: $(x, y, z) = (\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) + s(1, 0, 2), s \in \mathbb{R}$.

7. (b) nej (c) inte möjligt (d) $(0, 1, 0) = 0(1, 0, 2) + \frac{1}{3}(0, 1, 0) + 0(2, 1, 4)$.

8. (b) ekvation för planet: $-7x - 11y + z = 0$.