UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska Institutionen
Jens Fjelstad

2014-06-10
1MA025

Tentamen – Linjär algebra och geometri 1

Skrivtid: 08:00-13:00. Tillåtna hjälpmedel: skrivdon. Varje korrekt löst uppgift ger högst 5 poäng. För betyg 3 krävs minst 18 p, för betyg 4 krävs minst 25 p, och för betyg 5 krävs minst 32 p. Lösningarna skall vara väl motiverade. **Lycka till!**

1. Bestäm alla lösningar till ekvationsystemet

$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + (a-1)y + z = 1 \\ x + ay + az = 1 \end{cases}$$

för de värden på talet a som lösningar existerar.

2. Låt

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Bestäm alla matriser X som uppfyller ekvationen

$$AXC + BXC = C$$

3. Lös ekvationen

$$\begin{vmatrix} x & 2 & x & 3 & x \\ 2 & x & 3 & x & x \\ x & 3 & x & 2 & x \\ 3 & x & 2 & x & x \\ x & x & x & x & x \end{vmatrix} = 0.$$

4. Låt punkterna

$$A : (1, 8, 0), \quad B : (1, 6, 1), \quad C : (2, 8, 1), \quad D : (0, 6, 0)$$

vara givna.

(a) Visa att punkterna är hörnen i ett parallellogram där vektorn $\overrightarrow{CD}$ är ena diagonalen.

(b) Bestäm arean av detta parallellogram.

5. Planet π skär x-axeln i $(4, 0, 0)$, y-axeln i $(0, 1, 0)$, samt z-axeln i $(0, 0, 1)$. Bestäm koordinaterna för den punkt S på planet π som befinner sig närmast punkten $P : (9, 0, 7)$, samt avståndet mellan planet π och punkten P.

6. (a) Ge definitionen av spannet (linjära höljet) av vektorerna $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_k \in \mathbb{R}^n$.

(b) Avgör om spannet av vektorerna

$$\vec{w}_1 = (1, 1, 5),\ \vec{w}_2 = (2, 0, 1),\ \vec{w}_3 = (-1, -1, -1),\ \vec{w}_4 = (-1, 1, 4)$$

är hela $\mathbb{R}^3$.

(c) För vilka värden på $x \in \mathbb{R}$ tillhör vektorn $(1, 2, x)$ spannet $\text{Span}\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_4\}$?

7. Låt $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ vara den linjära avbildningen som

- avbildar $(1, 0, 0, 0)$ på $(0, 1, 0)$
- avbildar $(0, 1, 0, 0)$ på $(0, 0, 1)$
- avbildar $(1, 1, 1, 1)$ på $(1, 0, 0)$
- avbildar $(0, 0, 1, -1)$ på $(0, 1, 0)$.

(a) Finn standardmatrisen $[T]$ för T.

(b) Bestäm bilden av vektorerna $(1, 2, 3, 4)$ och $(-1, -1, 3, 3)$ under T.

8. Låt $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara speglingen i planet $x - y = 0$.

(a) Bestäm standardmatrisen $[S]$ för S.

(b) Finn alla egenvärden till matrisen $[S]$

(c) Finn en egenvektor svarande mot varje egenvärde.

Om deluppgift (a) inte kan lösas så är det i (b) och (c) tillåtet att (felaktigt!) anta följande form på $[S]$:

$$[S] = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$