UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Thomas Kragh

TENTAMEN i matematik
1MA025: Linjär algebra och geometri I
KandMa1, MatematikI, IT2, fristående
22 Oktober 2021 klockan 8.00–13.00

Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon. Lösningarna skall vara försedda med motiveringar och tillräckliga mellanberäkningar. Varje korrekt löst uppgift ger högst 5 poäng. För betygen 3, 4, 5 krävs minst 18, 25 respektive 32 poäng.

För att bli godkänd på hela kursen måste man också bli godkänd på alla momenttest på uu.mozquizto.se. Dessa är öppna till och med den 27e oktober och igen vid senare tentamenstillfälle i detta läsår.

1. Lös det linjära ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + 3y - 2z = a \\ -x - 2y + 2z = -2 \\ x - ay + az = 2 \end{cases}$$

för varje värde på $a \in \mathbb{R}$.

2. Låt $A = (-1, 2, -3)$, $B = (1, -2, 1)$, $C = (0, 0, 3)$ och $D = (-2, 4, -1)$ vara punkter i $\mathbb{R}^3$.

a) Visa att $ABCD$ är en parallellogram.

b) Hitta arean av denna parallellogram.

c) Hitta vinklarna i denna parallellogram.

3. a) Hitta, på parameterform, skärningslinjen mellan de två planen $\pi : x + y + z = 2$ och $\tau : 2x + z = 0$.

b) Hitta linjen genom $(1, 2, 3)$ som är parallell med båda planen i a).

c) Hitta planet genom $(1, 2, 3)$ som är ortogonalt mot båda planen i a).

4. Låt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestäm alla matriser X som uppfyller ekvationen

$$XCA - A = XCB - B.$$

Var god vänd!

5. Hitta alla reella x så att

$$\begin{vmatrix} 2x & 3x & 4x & 5x \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 2x & 1 & 2x & 1 \\ 1 & x & 1 & x \end{vmatrix} = 0$$

6. Låt $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara speglingen i planet $\pi : 2x + 3y - z = 0$.

a) Hitta S:s standardmatris $[S]$.

b) Använd a) till att hitta speglingen av punkten $A = (1, -1, -1)$ i planet π.

c) Avgör om P är injektiv.

7. Låt $\underline{v} = (\vec{v}_1 \ \ \vec{v}_2 \ \ \vec{v}_3)$ där

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

a) För vilka a är $\underline{v}$ linjärt oberoende?

b) För vilka a är det linjära höljet av $\underline{v}$ hela $\mathbb{R}^4$?

c) För vilka a är

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

i det linjära höljet av $\underline{v}$?

8. Låt

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

vara rotationsmatrisen som roterar med vinkeln θ i $\mathbb{R}^2$. Visa att för $\theta \neq n\pi$ finns det entydiga konstanter α och β (dessa får bero på θ) så att

$$A^2 + \alpha A + \beta I = 0.$$

Lycka till!