Lösningsförslag tentamen 2022-06-09
1MA025 Linjär algebra och geometri 1

1a) Ställer upp totalmatrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & a & 4 & 9 \\ 1 & 4 & a & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} -2 & -1 \\ \leftarrow & \\ & \leftarrow \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & a-4 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & a-2 & -3 \end{bmatrix} \updownarrow$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & a-2 & -3 \\ 0 & a-4 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$a=4 \Rightarrow$ systemet saknar lösning

Antag $a \neq 4$ och fortsätt från steget innan:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & a-4 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & a-2 & -3 \end{bmatrix} /(a-4) \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{a-4} \\ 0 & 2 & a-2 & -3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ -2 \\ \leftarrow \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{a-4} \\ 0 & 0 & a-2 & \frac{-3(a-2)}{a-4} \end{bmatrix}$$

$$-3-\frac{6}{a-4} = \frac{-3(a-4)-6}{a-4} = \frac{-3a+12-6}{a-4} = \frac{-3a+6}{a-4} = \frac{-3(a-2)}{a-4}$$

$a=2 \Rightarrow$ Nollrad $\Rightarrow$ Oändligt många lösningar

För $a \neq 2$ och $a \neq 4$ har systemet exakt en lösning.

Svar: $a=4 \Rightarrow$ systemet saknar lösning
$a=2 \Rightarrow$ systemet har oändligt många lösningar
$a \neq 2, a \neq 4 \Rightarrow$ systemet har exakt en lösning

b) Antag $a=2$ och fortsätt lösa från a.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ -2 \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \begin{matrix} x+2z=6 \\ y=-\frac{3}{2} \end{matrix}$ sätt $z=t \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-2t \\ -3/2 \\ t \end{pmatrix} \quad t \in \mathbb{R}$

Antag att $a \neq 2$ och $a \neq 4$ och fortsätt lösa från a:

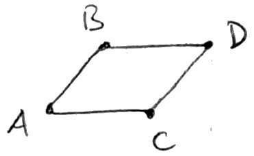
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{a-4} \\ 0 & 0 & a-2 & \frac{-3(a-2)}{a-4} \end{bmatrix} /(a-2) \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{a-4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-3}{a-4} \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ (-2) \\ (-2) \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{a-4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-3}{a-4} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3/(a-4) \\ -3/(a-4) \end{pmatrix}$$

Svar: För $a = 2$: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-2t \\ -3/2 \\ t \end{pmatrix}$ $t \in \mathbb{R}$

För $a \neq 2,4$ $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3/(a-4) \\ -3/(a-4) \end{pmatrix}$

2. a)



$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$D = A + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = B + \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\left(\text{eller } C + \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right)$$

Svar: $D = (5, 2, 4)$

b) $\text{Area} = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \left\| \begin{matrix} i & j & k \\ 4 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{matrix} \right\| = |(1-2)i + (6-4)j + (4-3)k|$

$$= |-i + 2j + k| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{6}$$

Svar: $\sqrt{6}$ a.e.

3. Om $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim I$ så är det en bas

I så fall kan vi skriva $\vec{u} = x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + x_3\vec{v}_3 + x_4\vec{v}_4$

och $\vec{w} = y_1\vec{v}_1 + y_2\vec{v}_2 + y_3\vec{v}_3 + y_4\vec{v}_4$.

vilket ger totalmatrisen

$$\left[\begin{array}{cccc|cc} 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & \pi \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & \pi \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & \pi \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & \pi \end{array}\right]$$

Vi löser a och b samtidigt:

$$\left[\begin{array}{cccc|cc} 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & \pi \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & \pi \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & \pi \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & \pi \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & \pi \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & \pi \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & \pi \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & \pi \end{array}\right] (-2)$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & \pi \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & \pi \\ 0 & 1 & -2 & -2 & -1 & -\pi \\ 0 & 2 & -2 & -2 & -2 & -\pi \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & \pi \\ 0 & 1 & -2 & -2 & -1 & -\pi \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & \pi \\ 0 & 2 & -2 & -2 & -2 & -\pi \end{array}\right] (-2)$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & \pi \\ 0 & 1 & -2 & -2 & -1 & -\pi \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & \pi \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & \pi \end{array}\right] (-1) \sim \left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & \pi \\ 0 & 1 & -2 & -2 & -1 & -\pi \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & \pi \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \end{array}\right] /4$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & \pi \\ 0 & 1 & -2 & -2 & -1 & -\pi \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & \pi \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] (2)\,(-1) \sim \left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & \pi \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -1 & -\pi \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & \pi \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] /2$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & \pi \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -1 & -\pi \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \pi/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] (2)\,(-1) \sim \left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & \pi/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \pi/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Koefficientmatrisen är ekvivalent med I vilket visar att $\underline{v}$ är en bas.

Svar: $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ och $\vec{w} = \begin{pmatrix} \pi/2 \\ 0 \\ \pi/2 \\ 0 \end{pmatrix}$

4. $AXB + BXB = I$

$\Leftrightarrow \quad (A+B)XB = I$

$\Leftrightarrow \quad (A+B)XBB^{-1} = IB^{-1}$ om B inverterbar

$\Leftrightarrow \quad (A+B)X = B^{-1}$

$\Leftrightarrow \quad (A+B)^{-1}(A+B)X = (A+B)^{-1}B^{-1}$ om $A+B$, inverterbar

$\Leftrightarrow \quad X = (A+B)^{-1}B^{-1}$

Om vi kan hitta $(A+B)^{-1}$ och B^{-1} så är $A+B$ och B inverterbara

$$(B \mid I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) = (I \mid B^{-1})$$

$$\Rightarrow \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A+B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(A+B \mid I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & 1 \end{array}\right) = (I \mid (A+B)^{-1})$$

$$\Rightarrow \quad (A+B)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Så $X = (A+B)^{-1}B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

Svar: $X = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

Kontroll: $(A+B)XB = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

5.
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ x & 3 & 1 & x \\ x & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ x & 3 & 1 & x \\ x & x & 1 & 1 \\ x+1 & x+1 & x+1 & x+1 \end{vmatrix}$$

$$= (x+1)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ x & 3 & 1 & x \\ x & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (x+1)\begin{vmatrix} -3 & -2 & 4 & -3 \\ x-1 & 2 & 1 & x-1 \\ x-1 & x-1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -(x+1)\begin{vmatrix} -3 & -2 & -3 \\ x-1 & 2 & x-1 \\ x-1 & x-1 & 0 \end{vmatrix} = -(x+1)(x-1)\begin{vmatrix} -3 & -2 & -3 \\ x-1 & 2 & x-1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -(x+1)(x-1)\begin{vmatrix} -3 & -2 & -3 \\ x-4 & 0 & x-4 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -(x+1)(x-1)\begin{vmatrix} -1 & -2 & -3 \\ x-4 & 0 & x-4 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (x+1)(x-1)\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ x-4 & x-4 \end{vmatrix} = (x+1)(x-1)(x-4)\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2(x+1)(x-1)(x-4) = 0 \iff x = -1, 1, 4$$

Svar: $x = -1, 1, 4$

6. a) l_1 och l_2 skär varandra om

$$\begin{cases} -2+2t = 4+s & (1) \\ -1+t = -1-s & (2) \\ 1 = 3+s & (3) \end{cases}$$ för något s och t

$s = 1-3 = -2 \Rightarrow$ ins. i (2) $\Rightarrow t = -1-(-2)+1 = 2$

(1) : $-2+2\cdot 2 = 2$ $\quad 4-2 = 2$ Ok

(2) : $-1+2 = 1$ $\quad -1-(-2) = 1$ Ok

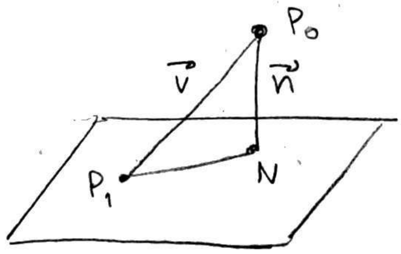
(3) : 1 $\quad 3+(-2) = 1$ Ok

Så: linjerna skär varandra. V.S.V.

Svar: Skärningspunkten är $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (i - 2j - 3k) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$
ger normalvektorn till planet som linjerna ligger i.
Planet Π har normalvektor $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ vilket vi läser av. Dessa vektorer är parallella. Alltså är planen parallella. V.S.V.

c)



Tag en punkt P_0 på Π och hitta punkten N på det andra planet som vi kallar Π_2.

Tag en punkt P_1 i Π_2 och projicera $\vec{v} = \overrightarrow{P_1P_0}$ på $\vec{n}$

$$P_0 = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad P_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{v} = \overrightarrow{P_1P_0} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_{\vec{n}} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{n}}{\vec{n} \cdot \vec{n}} \vec{n} \qquad \vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{-7}{1+4+9} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1 \\ -3/2 \end{pmatrix}$$

Avstånd: $\left| \vec{v}_{\vec{n}} \right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{4}{4} + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{14}{4}} = \sqrt{\frac{7}{2}}$

Svar: $\sqrt{\frac{7}{2}}$ l.e.

7 a)

$$[T] \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}}_{B}$$

$$\Leftrightarrow \quad [T] = BX^{-1}$$

$$[X|I] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} (-2) \\ \\ (-1) \\ \\ \end{matrix}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ (1) \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ \cdot(-1) \\ \\ \cdot\frac{1}{2} \end{matrix}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1/2 & 1/2 \end{array}\right] = [I | X^{-1}]$$

$$[T] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(Kontrollera att $[T]$ är rätt genom att beräkna $[T]X$ och se att det blir B.)

Svar: $[T] = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

b) $$T\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Svar: $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

8 A $m \times n$-matris $\Rightarrow A^T$ $n \times m$-matris

$\Rightarrow A^TA$ $n \times n$-matris.

För en $n \times n$-matris B gäller följande ekvivalens:

B inverterbar $\Longleftrightarrow$ $B\vec{x} = \vec{0}$ har endast lösningen $\vec{x} = \vec{0}$
($\vec{x}$ $n \times 1$-vektor)

Om vi kan visa $[A^TA\vec{x} = \vec{0} \Rightarrow \vec{x} = \vec{0}]$
så vet vi att A^TA är inverterbar.

Antag därför $A^TA\vec{x} = \vec{0}$. Vi ska visa att $\vec{x} = \vec{0}$ följer.

För en linjär avbildning $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$
(dvs en $m \times n$-matris A)
så gäller följande ekvivalens:

$\text{rang}(A) = n \Longleftrightarrow A\vec{x} = \vec{0}$ har endast lösningen $\vec{x} = \vec{0}$.

Om vi kan visa att $A\vec{x} = 0$ är vi alltså klara.

För en vektor $\vec{v}$ gäller $|\vec{v}|^2 = \vec{v}^T \cdot \vec{v}$. Vi har alltså

$$|A\vec{x}|^2 = (A\vec{x})^T A\vec{x} = \vec{x}^T \underbrace{A^TA\vec{x}}_{= \vec{0} \text{ enl antagande}} = \vec{x}^T \cdot \vec{0} = 0$$

Vi vet att $|\vec{v}|^2 = 0$ om och endast om $\vec{v} = \vec{0}$

Alltså gäller $A\vec{x} = \vec{0}$ så vi är klara.

$\Rightarrow A^TA$ är inverterbar v.s.v.

Specialfallet A $n \times n$-matris:

rang $A = n \iff A$ inverterbar $\iff A^T$ inverterbar

$\Rightarrow A^T A$ inverterbar v.s.v.