

Skrivtid: 8:00–13:00. Tillåtna hjälpmedel: Endast skrivdon. Tentan består av 8 uppgifter och varje uppgift är värd 5 poäng. Totalt krävs 18 poäng för betyget 3, 25 poäng för betyget 4 och 32 poäng för betyget 5. Alla lösningar ska innehålla fullständiga resonemang och inte bara svar. Upp till 3 bonuspoäng kunde man få genom inlämningsuppgifter, se kursens Studiumsida för detaljer.

1. Låt $\sigma = \{p, q, r\}$ vara en satslogisk signatur. Visa följande sekvenser genom att ge ett formellt bevis i naturlig deduktion.

(a) $p \rightarrow q \vdash p \wedge r \rightarrow q \wedge r,$

(b) $\{\neg\neg q \rightarrow p, q\} \vdash \neg\neg p.$

2. Låt $\sigma = \{p, q, r\}$.

(a) Låt φ vara formeln $(p \wedge q) \rightarrow r$. Ange φ 's parsingträd. Ange formeln $\psi = \varphi[p \vee r/q]$ samt ψ 's parsingträd.

(b) Visa med hjälp av induktion att varje satslogisk formel med konnektivsymboler från $\{\wedge, \neg\}$ som inte innehåller $\perp$ innehåller minst ett element av mängden σ .

3. Låt $\leftrightarrow$ vara en konnektiv så att $p \leftrightarrow q$ är logiskt ekvivalent med $\neg(p \leftrightarrow q)$.

(a) Vad betyder det att en mängd Γ av konnektiv är funktionellt komplett?

(b) Ange en satslogisk formel φ som är ekvivalent med $\perp$, men innehåller inte $\perp$, men bara konnektiv $\vee, \leftrightarrow, \leftrightarrow$.

(c) Visa att mängden $\{\vee, \leftrightarrow, \leftrightarrow\}$ är funktionellt komplett.

4. Vilka av följande påståenden stämmer eller inte stämmer? Motivera dina svar genom att ge ett bevis när påståendet stämmer och ett motexempel när påståendet inte stämmer.

(a) Om en satslogisk formel är satisfierbar, då är varje delformel satisfierbar.

(b) Om en formel i första ordningens logik är valid, då är den satisfierbar.

(c) Formeln $\neg\exists x(x \doteq x)$ är satisfierbar.

Var god vänd!

5. Låt σ vara en signatur i första ordningens logik med en konstantsymbol $\bar{a}$ och en ett-ställig relationssymbol $\bar{P}$ (och inga funktionssymboler). Visa följande sekventer genom att ge ett formellt bevis i naturlig deduktion. När du använder en av de reglerna med speciella krav, $\forall I$ och $\exists E$, argumentera noggrant varför du får använda den.

$$(a) \vdash (\forall x(x \doteq \bar{a} \rightarrow \bar{P}(x))) \rightarrow \bar{P}(\bar{a}),$$

$$(b) \vdash \forall x \exists y(x \doteq y)$$

6. Låt σ vara en signatur i första ordningens logik med två ett-ställiga relationssymboler $\bar{P}$ och $\bar{Q}$ (och inga konstantsymboler eller funktionssymboler). Visa att följande formler är logiskt ekvivalenta:

$$(\exists x \bar{P}(x)) \rightarrow (\forall y \bar{Q}(y)) \text{ och } \forall x(\bar{P}(x) \rightarrow (\forall y \bar{Q}(y))).$$

7. Låt σ vara en signatur i första ordningens logik med två två-ställiga relationssymboler $\bar{R}$ och $\bar{S}$ (och inga konstantsymboler eller funktionssymboler).

(a) Ange en formel i prenexnormalform som är ekvivalent med följande formel.

$$\forall x((\exists y \bar{R}(x, y)) \wedge (\forall y \neg \bar{S}(x, y)) \rightarrow \neg(\exists y \bar{R}(x, y)))$$

Motivera dina steg.

(b) Är formeln i (a) satisfierbar? Är den falsifierbar? Motivera dina svar.

8.

(a) Formulera kompakthetssatsen för första ordningens logik.

(b) Låt σ vara en signatur med en två-ställig relationssymbol $\leq$ (och varken funktions- eller konstantsymboler). Visa att mängden Γ som består av följande formler är satisfierbar.

- $\forall x \forall y \forall z(x \leq y \wedge y \leq z \rightarrow x \leq z),$
- $\forall x \forall y(x \leq y \wedge y \leq x \leftrightarrow x \doteq y),$
- $\exists x \exists y(\neg(x \doteq y) \wedge x \leq y),$
- $\forall x \forall y(\neg(x \doteq y) \wedge x \leq y) \rightarrow \exists z(x \leq z \wedge z \leq y \wedge \neg(x \doteq z) \wedge \neg(z \doteq y)).$

(c) Visa att för varje modell $\mathfrak{A} = \langle A; \leq_A \rangle$ av Γ har A oändlig många element.

Lycka till!