

Skrivtid: 8:00–13:00. Tillåtna hjälpmedel: Endast skrivdon. Tentan består av 8 uppgifter och varje uppgift är värd 5 poäng. Totalt krävs 18 poäng för betyget 3, 25 poäng för betyget 4 och 32 poäng för betyget 5. Alla lösningar ska innehålla fullständiga resonemang och inte bara svar. Upp till 3 bonuspoäng kunde man få genom inlämningsuppgifter, se kursens Studiumsida för detaljer.

1. Låt $\sigma = \{p, q, r\}$ vara en satslogisk signatur. Visa följande sekvenser genom att ge ett formellt bevis i naturlig deduktion.

(a) $p \rightarrow q \vdash p \wedge r \rightarrow q \wedge r,$

(b) $\{\neg\neg q \rightarrow p, q\} \vdash \neg\neg p.$

Lösning 1

$$\begin{array}{l}
 \text{(a)} \quad \frac{\frac{p \wedge r^{(1)}}{p} \wedge E \quad p \rightarrow q \rightarrow E \quad \frac{p \wedge r^{(1)}}{r} \wedge E}{q \quad \frac{q \wedge r}{p \wedge r \rightarrow q \wedge r} \rightarrow I^{(1)}} \wedge I \\
 \text{(b)} \quad \frac{\frac{q \quad \neg q^{(2)}}{\perp} \neg E \quad \frac{\perp}{\neg\neg q} \neg I^{(2)} \quad \neg\neg q \rightarrow p \rightarrow E \quad \frac{p \quad \neg p^{(1)}}{\perp} \neg E}{\neg\neg p} \neg I^{(1)}
 \end{array}$$

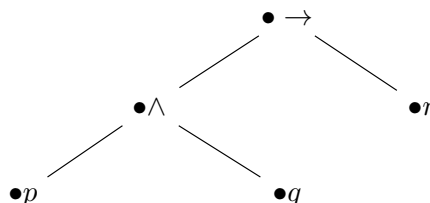
2. Låt $\sigma = \{p, q, r\}$.

(a) Låt φ vara formeln $(p \wedge q) \rightarrow r$. Ange φ 's parsingträd. Ange formeln $\psi = \varphi[p \vee r/q]$ samt ψ 's parsingträd.

(b) Visa med hjälp av induktion att varje satslogisk formel med konnektivsymboler från $\{\wedge, \neg\}$ som inte innehåller $\perp$ innehåller minst ett element av mängden σ .

Lösning 2

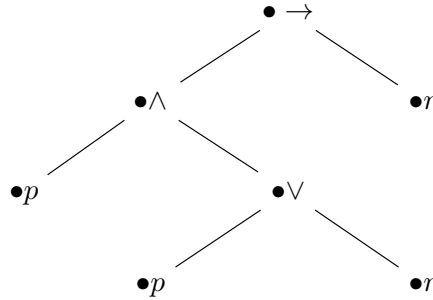
(a) Formeln φ har parsingträd



Formeln ψ är substitutionen av φ med $p \vee r$ för q . Då får vi

$$\psi = \varphi[p \vee r/q] = (p \wedge (p \vee r)) \rightarrow r,$$

vars parsingträd är:



- (b) Bas till strukturell induktion över formler är att formeln är antingen s för något $s \in \sigma$ eller $\perp$. Eftersom vår formel innehåller inte $\perp$, så måste den innehåller något $s \in \sigma$. Eftersom vår formel har bara $\wedge, \neg$ som konnektiv, så har vi bara två fall för induktionssteg, beroende på vilken huvudkonnektiv vår formel har. Om huvudkonnektiv är $\neg$, så är vår formel $\neg\psi$ för en kortare formel ψ . Enligt induktionsantagande kan vi då anta att ψ innehåller minst ett element av σ . Men då vet vi även att $\neg\psi$ innehåller minst ett element av mängden σ . Om å andra sidan huvudkonnektiv är $\wedge$, så vet vi att formeln är $\psi_1 \wedge \psi_2$. Om vi använder igen induktionsantagande, så vet vi att både ψ_1 och ψ_2 innehåller minst ett element av mängden σ . Därför vet vi att även $\psi_1 \wedge \psi_2$ innehåller minst ett element av mängden σ (även minst två eftersom både ψ_i innehåller minst ett element av σ).

3. Låt $\leftrightarrow$ vara en konnektiv så att $p \leftrightarrow q$ är logiskt ekvivalent med $\neg(p \leftrightarrow q)$.

- (a) Vad betyder det att en mängd Γ av konnektiv är funktionellt komplett?
 (b) Ange en satslogisk formel φ som är ekvivalent med $\perp$, men innehåller inte $\perp$, men bara konnektiv $\vee, \leftrightarrow, \leftrightarrow$.
 (c) Visa att mängden $\{\vee, \leftrightarrow, \leftrightarrow\}$ är funktionellt komplett.

Lösning 3, möjlighet A.

- (a) En mängd Γ kallas för funktionellt komplett om för varje satslogisk formel φ det finns en formel ψ som är logiskt ekvivalent med φ så att ψ innehåller bara konnektiv från mängden Γ .
 (b) Ett exempel för en formel, som är ekvivalent med $\perp$, är $p \leftrightarrow p$. Vi kan visa det genom att skriva sanningsvärdestabellen:

p	$\neg$	$(p \leftrightarrow p)$
0	0	1
1	0	1

Vi ser att formeln $p \leftrightarrow p$ har sanningsvärde 0, oberoende av värdet för p , är alltså logiskt ekvivalent med $\perp$.

- (c) I föreläsningen har vi sett att mängden $\{\vee, \neg\}$ är funktionellt komplett. Det är därför tillräckligt att uttrycka $p \vee q$ och $\neg p$ med formler som bara innehåller konnektiv från $\{\vee, \leftrightarrow, \leftrightarrow\}$. För $p \vee q$ behövs ingen annan formel, det är redan uttryckt så. För $\neg p$ kan vi ta formeln $p \leftrightarrow (p \leftrightarrow p)$. Vi visar att de två formler är logiskt ekvivalenta med hjälp av en sanningsvärdestabell:

p	$p \leftrightarrow (p \leftrightarrow p)$
0	1
1	0

Lösning 3, möjlighet B.

- (b) Vi ger en alternativ möjlighet att skriva $\perp$ med hjälp av våra konnektiv. Argumentationen är samma som i lösningsmöjlighet A.

p	q	$(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (p \leftrightarrow q)$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

- (c) Från föreläsningen vet vi att Shefferstreck (NAND) är funktionellt komplett. Det är därför tillräckligt att skriva om Shefferstreck med hjälp av konnektiv från Γ . Formeln vi tar för $p|q$ är $(p \leftrightarrow (p \leftrightarrow p)) \vee (q \leftrightarrow (q \leftrightarrow q))$. Vi visar att de är logiskt ekvivalent med hjälp av en sanningsvärdestabell:

p	q	$(p \leftrightarrow (p \leftrightarrow p))$	$\vee$	$(q \leftrightarrow (q \leftrightarrow q))$
0	0	1	1	0
0	1	1	0	0
1	0	0	1	0
1	1	0	0	0

4. Vilka av följande påståenden stämmer eller inte stämmer? Motivera dina svar genom att ge ett bevis när påståendet stämmer och ett motexempel när påståendet inte stämmer.

- (a) Om en satslogisk formel är satisfierbar, då är varje delformel satisfierbar.
- (b) Om en formel i första ordningens logik är valid, då är den satisfierbar.
- (c) Formeln $\neg \exists x(x \doteq x)$ är satisfierbar.

Lösning 4.

- (a) Det stämmer inte att om en satslogisk formel är satisfierbar, då är varje delformel satisfierbar. Ett enkelt motexempel är formeln $\neg \perp$, som är satisfierbar (även en tautologi, så det är sann i varje modell), men delformeln $\perp$ är osatisfierbar (dvs den är falsk i varje modell). Det finns många andra möjliga motexempel, t. ex. en formel där man tar en disjunktion av en osatisfierbar formel och en satisfierbar formel som $(p \wedge \neg p) \vee q$, som är satisfierbar (med en modell där $\mathcal{A}(q) = 1$) och har den osatisfierbara delformeln $p \wedge \neg p$.
- (b) En formel i första ordningens logik kallas valid om den är sann i alla strukturer (motsvarande begrepp i satslogik är tautologi). Om en formel är valid, då är den även satisfierbar, vilket betyder att den är sann i minst en struktur, så påståendet stämmer. Om man vill vara väldigt noggrant, så kan man förklara att det finns minst en struktur till varje signatur (t. ex. strukturen som har mängden $\{1\}$, alla konstanter tolkas som 1, alla funktioner tolkas som den konstant-1-funktionen och alla relationer är tomma).

- (c) Formeln $\neg\exists x(x \doteq x)$ säger att det finns inget x vilket är lika med sig själv. Satisfierbarhet av en formel betyder att det finns en struktur $\mathfrak{A}$ med mängden A så att formeln är sann i $\mathfrak{A}$. Det skulle endast fungera om mängden A vara tom, annars är det ju absurd att $x \neq x$. Men den toma mängden var inte tillåten i vår definition av en struktur.

5. Låt σ vara en signatur i första ordningens logik med en konstantsymbol $\bar{a}$ och en ettställig relationssymbol $\bar{P}$ (och inga funktionssymboler). Visa följande sekventer genom att ge ett formellt bevis i naturlig deduktion. När du använder en av de reglerna med speciella krav, $\forall I$ och $\exists E$, argumentera noggrant varför du får använda den.

$$(a) \vdash (\forall x(x \doteq \bar{a} \rightarrow \bar{P}(x))) \rightarrow \bar{P}(\bar{a}),$$

$$(b) \vdash \forall x \exists y(x \doteq y)$$

Lösning 5.

$$(a) \frac{\frac{\cdot}{\bar{a} = \bar{a}} = I \quad \frac{\frac{\forall x(x = \bar{a} \rightarrow \bar{P}(x))^{(1)}}{\bar{a} = \bar{a} \rightarrow \bar{P}(\bar{a})} \forall E}{\frac{P(\bar{a})}{(\forall x(x = \bar{a} \rightarrow \bar{P}(x))) \rightarrow \bar{P}(\bar{a})} \rightarrow E} \rightarrow I^{(1)}$$

$$(b) \frac{\frac{\cdot}{x \doteq x} = I}{\frac{\exists y(x \doteq y)}{\forall x \exists y(x \doteq y)} \exists I} \forall I$$

Vi måste argumentera varför $\forall I$ får användas i sista steget. Kravet för att använda $\forall I$ är att ingen av premisserna ovanför $\exists y(x \doteq y)$ innehåller x fritt, men det finns inga premisser ovanför $\exists y(x \doteq y)$, så det går bra.

6. Låt σ vara en signatur i första ordningens logik med två ett-ställiga relationssymboler $\bar{P}$ och $\bar{Q}$ (och inga konstantsymboler eller funktionssymboler). Visa att följande formler är logiskt ekvivalenta:

$$(\exists x \bar{P}(x)) \rightarrow (\forall y \bar{Q}(y)) \text{ och } \forall x(\bar{P}(x) \rightarrow (\forall y \bar{Q}(y))).$$

Lösning 6, möjlighet A. Vi använder en kedja av välkända logiska ekvivalenser:

$$\begin{array}{ll} \exists x \bar{P}(x) \rightarrow (\forall y \bar{Q}(y)) & \\ \text{eq } (\neg \exists x \bar{P}(x)) \vee (\forall y \bar{Q}(y)) & \varphi \rightarrow \psi \text{ eq } \neg \varphi \vee \psi \\ \text{eq } (\forall x \neg \bar{P}(x)) \vee (\forall y \bar{Q}(y)) & \neg \exists x \varphi \text{ eq } \forall x \neg \varphi \\ \text{eq } \forall x(\neg \bar{P}(x) \vee \forall y \bar{Q}(y)) & (\forall x \varphi(x)) \vee \psi \text{ eq } \forall x(\varphi(x) \vee \psi) \text{ om } x \notin \text{FV}(\psi) \\ \text{eq } \forall x(\bar{P}(x) \rightarrow \forall y \bar{Q}(y)) & \varphi \rightarrow \psi \text{ eq } \neg \varphi \vee \psi \end{array}$$

Lösning 6, möjlighet B. Enligt definitionen betyder att de två formler är logiskt ekvivalenta att $\models ((\exists x \bar{P}(x)) \rightarrow (\forall y \bar{Q}(y))) \leftrightarrow (\forall x(\bar{P}(x) \rightarrow (\forall y \bar{Q}(y))))$. Enligt sundhetssatsen är det dock tillräckligt att visa $\vdash ((\exists x \bar{P}(x)) \rightarrow (\forall y \bar{Q}(y))) \leftrightarrow (\forall x(\bar{P}(x) \rightarrow (\forall y \bar{Q}(y))))$ istället,

dvs att ge ett formellt bevis i naturlig deduktion för det.

$$\begin{array}{c}
\frac{\overline{P(x)}^{(2)}}{\exists x \overline{P(x)}} \exists I \quad \frac{(\exists x \overline{P(x)}) \rightarrow (\forall y \overline{Q(y)})^{(1)}}{\forall y \overline{Q(y)}} \rightarrow E \\
\frac{\overline{P(x)} \rightarrow (\forall y \overline{Q(y)})}{\forall x (\overline{P(x)} \rightarrow (\forall y \overline{Q(y)}))} \rightarrow I \\
\frac{\forall x (\overline{P(x)} \rightarrow (\forall y \overline{Q(y)}))}{((\exists x \overline{P(x)}) \rightarrow (\forall y \overline{Q(y)})) \rightarrow (\forall x (\overline{P(x)} \rightarrow (\forall y \overline{Q(y)})))} \forall I \rightarrow I(1) \\
\frac{((\exists x \overline{P(x)}) \rightarrow (\forall y \overline{Q(y)})) \rightarrow (\forall x (\overline{P(x)} \rightarrow (\forall y \overline{Q(y)})))}{((\exists x \overline{P(x)}) \rightarrow (\forall y \overline{Q(y)})) \leftrightarrow (\forall x (\overline{P(x)} \rightarrow (\forall y \overline{Q(y)})))} \leftrightarrow I
\end{array}
\quad
\begin{array}{c}
\frac{\overline{P(x)}^{(5)}}{\exists x \overline{P(x)}} \exists I \\
\frac{\forall x (\overline{P(x)} \rightarrow (\forall y \overline{Q(y)}))^{(3)}}{\overline{P(x)} \rightarrow (\forall y \overline{Q(y)})} \forall E \\
\frac{\overline{P(x)} \rightarrow (\forall y \overline{Q(y)})}{\forall y \overline{Q(y)}} \rightarrow E \\
\frac{\forall y \overline{Q(y)}}{(\exists x \overline{P(x)}) \rightarrow (\forall y \overline{Q(y)})} \rightarrow I(4) \\
\frac{(\exists x \overline{P(x)}) \rightarrow (\forall y \overline{Q(y)})}{(\forall x (\overline{P(x)} \rightarrow (\forall y \overline{Q(y)})) \rightarrow ((\exists x \overline{P(x)}) \rightarrow (\forall y \overline{Q(y)})))} \rightarrow I(3) \\
\frac{(\forall x (\overline{P(x)} \rightarrow (\forall y \overline{Q(y)})) \rightarrow ((\exists x \overline{P(x)}) \rightarrow (\forall y \overline{Q(y)})))}{((\exists x \overline{P(x)}) \rightarrow (\forall y \overline{Q(y)})) \leftrightarrow (\forall x (\overline{P(x)} \rightarrow (\forall y \overline{Q(y)})))} \leftrightarrow I
\end{array}$$

Viktigt här är att kolla att de krav för $\forall I$ och $\exists E$ är uppfyllda. För $\forall I$ är kravet att alla premisser ovanför $\overline{P(x)} \rightarrow (\forall y \overline{Q(y)})$ inte innehåller x fritt, men den enda ostryckna premissen vid det steget är $(\exists x \overline{P(x)}) \rightarrow (\forall y \overline{Q(y)})$, i vilken x förekommer bara bunden. För $\exists E$ är kravet att x inte förekommer fritt i slutsatsen $\forall y \overline{Q(y)}$ och i ingen av premisserna ovanför dessa slutsats förutom $\overline{P(x)}$ själv. Den enda premissen vi har dessutom här är $\forall x (\overline{P(x)} \rightarrow (\forall y \overline{Q(y)}))$, i vilken x förekommer bara bunden.

7. Låt σ vara en signatur i första ordningens logik med två två-ställiga relationssymboler $\overline{R}$ och $\overline{S}$ (och inga konstantsymboler eller funktionssymboler).

(a) Ange en formel i prenexnormalform som är ekvivalent med följande formel.

$$\forall x((\exists y \overline{R}(x, y)) \wedge (\forall y \neg \overline{S}(x, y)) \rightarrow \neg(\exists y \overline{R}(x, y)))$$

Motivera dina steg.

(b) Är formeln i (a) satisfierbar? Är den falsifierbar? Motivera dina svar.

Lösning 7, möjlighet A.

(a)

$$\begin{array}{ll}
\forall x((\exists y \overline{R}(x, y)) \wedge (\forall y \neg \overline{S}(x, y)) \rightarrow \neg(\exists y \overline{R}(x, y))) & \\
\text{eq } \forall x(\neg(\exists y \overline{R}(x, y) \wedge (\forall y \neg \overline{S}(x, y))) \vee \neg(\exists y \overline{R}(x, y))) & \varphi \rightarrow \psi \text{ eq } \neg\varphi \vee \psi \\
\text{eq } \forall x(((\neg\exists y \overline{R}(x, y)) \vee (\neg\forall y \neg \overline{S}(x, y))) \vee \neg(\exists y \overline{R}(x, y))) & \text{de Morgan} \\
\text{eq } \forall x((\forall y \neg \overline{R}(x, y)) \vee (\exists y \neg \neg \overline{S}(x, y)) \vee (\forall y \neg \overline{R}(x, y))) & \text{kommutering av } \neg \text{ och kvantorer} \\
\text{eq } \forall x((\forall y \neg \overline{R}(x, y)) \vee (\exists y \overline{S}(x, y)) \vee (\forall y \neg \overline{R}(x, y))) & \text{dubbelnegation} \\
\text{eq } \forall x((\forall y \neg \overline{R}(x, y)) \vee (\exists z \overline{S}(x, z)) \vee (\forall w \neg \overline{R}(x, w))) & \text{namnbyte på variabler} \\
\text{eq } \forall x \forall y \exists z \forall w (\neg \overline{R}(x, y) \vee \overline{S}(x, z) \vee \neg \overline{R}(x, w)) & \text{kvantorer framåt}
\end{array}$$

(b) Formeln i (a) är satisfierbar, som modell kan vi ta $\mathfrak{A} = \langle \{a\}, R_A = \emptyset, S_A = \{(a, a)\} \rangle$. Man kan se från prenex-normalformen att formeln är sann i $\mathfrak{A}$. Formeln i (a) är också falsifierbar. Som motexempel kan vi ta $\mathfrak{B} = \langle \{a\}, R_A = \{(a, a)\}, S_A = \emptyset \rangle$. Igen kan man se från prenex-normalformen att formeln är falsk i $\mathfrak{B}$.

Lösning 7, möjlighet B.

- (a) Den lösningen börjar likadant, men man ser att en av delformler förekommer dubbelt och kan använda sig av idempotentslagen.

$$\begin{aligned}
 & \forall x((\exists y \bar{R}(x, y)) \wedge (\forall y \neg \bar{S}(x, y)) \rightarrow \neg(\exists y \bar{R}(x, y))) \\
 \text{eq } & \forall x(\neg(\exists y \bar{R}(x, y) \wedge (\forall y \neg \bar{S}(x, y))) \vee \neg(\exists y \bar{R}(x, y))) && \varphi \rightarrow \psi \text{ eq } \neg\varphi \vee \psi \\
 \text{eq } & \forall x(((\neg \exists y \bar{R}(x, y)) \vee (\neg \forall y \neg \bar{S}(x, y))) \vee \neg(\exists y \bar{R}(x, y))) && \text{de Morgan} \\
 \text{eq } & \forall x((\neg \exists y \bar{R}(x, y)) \vee \neg \forall y \neg \bar{S}(x, y)) && \vee \text{ idempotent (+komm., assoc.)} \\
 \text{eq } & \forall x(\forall y \neg \bar{R}(x, y) \vee \exists y \neg \neg \bar{S}(x, y)) && \text{kommatering av } \neg \text{ och kvantorer} \\
 \text{eq } & \forall x(\forall y \neg \bar{R}(x, y) \vee \exists y \bar{S}(x, y)) && \text{dubbelnegation} \\
 \text{eq } & \forall x(\forall y \neg \bar{R}(x, y) \vee \exists z \bar{S}(x, z)) && \text{namnbyte} \\
 \text{eq } & \forall x \forall y \exists z(\neg \bar{R}(x, y) \vee \bar{S}(x, z)) && \text{kvantorer framåt}
 \end{aligned}$$

- (b) Det finns förstås många modeller, t. ex. varje modell med $R_A = \emptyset$ (oberoende av vad A är). Det finns också många motexempel, t. ex. $\mathfrak{B} = \langle B = \{1, 2\}, R_B = S_B = \{(1, 1)\} \rangle$: Vi kan se att det inte gäller för alla x, y att $\bar{R}(x, y)$ inte gäller, t. ex. gäller $\bar{R}(1, 1)$, och dessutom finns det inte för alla x en z med $\bar{S}(x, z)$, t.ex. $x = 2$ har inget motsvarande z .

8.

- (a) Formulera kompakthetssatsen för första ordningens logik.
- (b) Låt σ vara en signatur med en två-ställig relationssymbol $\leq$ (och varken funktions- eller konstantsymboler). Visa att mängden Γ som består av följande formler är satisfierbar.

- $\forall x \forall y \forall z (x \leq y \wedge y \leq z \rightarrow x \leq z)$,
- $\forall x \forall y (x \leq y \wedge y \leq x \leftrightarrow x \doteq y)$,
- $\exists x \exists y (\neg(x \doteq y) \wedge x \leq y)$,
- $\forall x \forall y (\neg(x \doteq y) \wedge x \leq y) \rightarrow \exists z (x \leq z \wedge z \leq y \wedge \neg(x \doteq z) \wedge \neg(z \doteq y))$.

- (c) Visa att för varje modell $\mathfrak{A} = \langle A; \leq_A \rangle$ av Γ har A oändlig många element.

Lösning 8.

- (a) Kompakthetssatsen för första ordningens logik säger att en mängd Γ är satisfierbar om och endast om alla ändliga delmängder av Γ är satisfierbar.
- (b) Vi kan ta σ -strukturen med mängd $\mathbb{R}$ och $\leq_{\mathbb{R}}$ den vanliga 'mindre eller lika med'-relationen. Vi vet (t. ex. från Algebra I att den är transitiv och antisymmetrisk, så att de första två formelnerna gäller. För den tredje formeln kan man ta $x = 1$ och $y = 2$ för att se att den är uppfyllt. Den fjärde säger att mellan var två tal finns ett tredje. Den är också uppfyllt. Om $x \leq y$, då uppfyller $z = \frac{x+y}{2}$ att $x \leq z \leq y$.
- (c) Låt $\mathfrak{A} = \langle A; \leq_A \rangle$ vara en modell av Γ . Vi vill visa att A har oändligt många element. Vi ser först att A har minst två olika element a_0, b (med $a_0 \leq b$) eftersom den tredje formeln i Γ gäller. Den fjärde axiom garanterar nu att det finns ett element a_1 med $a_0 \leq a_1 \leq b$. En enkel induktion ger nu oändlig många element $a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq b$. De första två formler garanterar nu att de alla är olika: Om vi hade att $a_i = a_j$ för någon $i < j$, då innebär transitivitet att $a_{i+1} \leq a_j = a_i$ och eftersom vi även har $a_i \leq a_{i+1}$, då innebär antisymmetri att $a_i = a_{i+1}$, en motsägelse till konstruktionen av a_{i+1} .

Lösningsskommentar 8.

- (b) Exemplet $\mathbb{Q}$ fungerar också, så att man kan se att inte varje modell är ouppräcklig. Däremot är $\mathbb{N}$ och $\mathbb{Z}$ inga modeller med den vanliga $\leq$ eftersom det inte finns ett tal strikt mellan 1 och 2 i dessa mängder.
- (c) Man måste använda alla formler för att visa att A har oändligt många element, t. ex. uppfyller mängden $\{1, 2, \dots, n\}$ för $n \geq 2$ de första tre formler, men inte den fjärde. Likadant uppfyller $\{1, 2, 3\}$ med $1 \leq 2 \leq 3 \leq 1$ den första, tredje och fjärde formeln, men inte den andra.