

Skriptid: 8:00–13:00. Tillåtna hjälpmedel: Endast skrivdon. Tentan består av 8 uppgifter och varje uppgift är värd 5 poäng. Totalt krävs 18 poäng för betyget 3, 25 poäng för betyget 4 och 32 poäng för betyget 5. Alla lösningar ska innehålla fullständiga resonemang och inte bara svar. Bonuspoäng från inlämningsuppgifterna räknas inte för denna omtentamen.

1. Låt $\sigma = \{p, q\}$ vara en satslogisk signatur. Visa följande sekventer genom att ge ett formellt bevis i naturlig deduktion.

(a) $p \rightarrow q \vdash p \vee p \rightarrow q \vee q,$

(b) $\{p, \neg q\} \vdash \neg(p \leftrightarrow q).$

2. Låt $\sigma = \{p\}$ vara en satslogisk signatur. Definiera rekursivt följande formel φ_0 är formeln p och φ_{n+1} definieras som formeln $(\varphi_n \leftrightarrow p)$.

(a) Vad betyder det för en satslogisk formel φ att vara en tautologi?

(b) För vilka n är φ_n en tautologi? Visa ditt svar med hjälp av induktion.

3. Låt $\sigma = \{p, q, r\}$ vara en satslogisk signatur. Låt φ vara formeln $(p \wedge r) \leftrightarrow (\neg q \vee r)$.

(a) Ange en formel ψ i disjunktiv normalform som är logiskt ekvivalent med φ .

(b) Ange en formel χ i konjunktiv normalform som är logiskt ekvivalent med φ .

4. Vilka av följande påståenden stämmer eller inte stämmer? Motivera dina svar genom att ge ett bevis när påståendet stämmer och ett motexempel när påståendet inte stämmer.

(a) Om φ_1 , φ_2 och ψ är satslogiska formler i $LP(\sigma)$ och $p \in \sigma$ så att $\varphi_1[\psi/p] = \varphi_2[\psi/p]$, då är $\varphi_1 = \varphi_2$.

(b) Om en formel i första ordningens logik är osatisfierbar, då är den falsifierbar.

(c) Om en formel φ i första ordningens logik är i prenexnormalform, då är även varje formel ψ , som är logiskt ekvivalent med φ , i prenexnormalform.

Var god vänd!

5. Låt σ vara en signatur i första ordningens logik med en ett-ställig funktionssymbol $\bar{f}$ (och inga konstant- eller relationssymboler). Visa följande sekventer genom att ge ett formellt bevis i naturlig deduktion. När du använder en av de reglerna med speciella krav, $\forall I$ och $\exists E$, argumentera noggrant varför du får använda den.

- (a) $\forall x(\bar{f}(x) \doteq x) \vdash \forall x(\bar{f}(x) \doteq \bar{f}(\bar{f}(x)))$,
- (b) $\vdash \forall x \forall y (\neg(x \doteq y) \rightarrow \exists z((x \doteq z) \wedge \neg(y \doteq z)))$.

6. Låt σ vara en signatur i första ordningens logik med två ett-ställiga relationssymboler $\bar{P}$ och $\bar{Q}$ (och inga konstantsymboler eller funktionssymboler).

- (a) Visa att $\exists x \bar{P}(x) \rightarrow \exists x \bar{Q}(x) \models \exists x(\bar{P}(x) \rightarrow \bar{Q}(x))$.
- (b) Gäller även $\exists x(\bar{P}(x) \rightarrow \bar{Q}(x)) \models \exists x \bar{P}(x) \rightarrow \exists x \bar{Q}(x)$? Motivera ditt svar.

7. Låt σ vara en signatur i första ordningens logik med en konstantsymbol $\bar{1}$, en ett-ställig relationssymbol $\bar{P}$ samt en två ställig relationssymbol $\bar{D}$. Vi betraktar σ -strukturen $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{N}; 1_{\mathbb{N}}; P_{\mathbb{N}}, D_{\mathbb{N}} \rangle$ där $1_{\mathbb{N}}$ är den vanliga 1, $P_{\mathbb{N}}(x)$ om x är ett primtal och $D_{\mathbb{N}}(m, n)$ om m delar n , dvs det finns $k \in \mathbb{N}$ med $m \cdot k = n$.

- (a) Ange en formel φ i första ordningens logik med signatur σ som uttrycker: "Ett tal x är ett primtal om och endast om varje delare av x är lika med 1 eller x själv."
- (b) Är formeln φ du har givit i (a) satisfierbar? Är den falsifierbar? Motivera ditt svar.

8. Låt $\sigma = \langle \{\bar{x}, \bar{y}\}; \bar{R}; \emptyset \rangle$ vara en signatur i första ordningens logik med två konstantsymboler, en två-ställig relationssymbol och inga funktionssymboler. Vi tolkar en σ -struktur $\mathfrak{A} = \langle A; x_A, y_A; R_A \rangle$ som en riktad graf med nodmängd A , två speciella noder x_A och y_A och relationen $R_A(u, v)$ som säger att det finns en kant från noden u till noden v .

- (a) Ange en σ -struktur för följande graf $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4$ med speciala noder 1 och 4.
- (b) Ange en formel φ som uttrycker att det inte finns en väg av längd 3 från x_A till y_A , dvs z_1 och z_2 och kanter $x_A \rightarrow z_1 \rightarrow z_2 \rightarrow y_A$.
- (c) Visa att det inte finns en mängd formler Γ i första ordningens logik med signatur σ så att $\mathfrak{A} \models \Gamma$ om och endast om det finns n och n stycken noder $z_1, \dots, z_n$ med kanter som i följande bild

$$x_A \rightarrow z_1 \rightarrow z_2 \rightarrow \dots \rightarrow z_n \rightarrow y_A.$$

Lycka till!