

Skrivtid: 8:00–13:00. Tillåtna hjälpmedel: Endast skrivdon. Tentan består av 8 uppgifter och varje uppgift är värd 5 poäng. Totalt krävs 18 poäng för betyget 3, 25 poäng för betyget 4 och 32 poäng för betyget 5. Alla lösningar ska innehålla fullständiga resonemang och inte bara svar. Bonuspoäng från inlämningsuppgifterna räknas inte för denna omtentamen.

1. Låt $\sigma = \{p, q\}$ vara en satslogisk signatur. Visa följande sekvenser genom att ge ett formellt bevis i naturlig deduktion.

(a) $p \rightarrow q \vdash p \vee p \rightarrow q \vee q$,

(b) $\{p, \neg q\} \vdash \neg(p \leftrightarrow q)$.

Lösning 1.

$$\begin{array}{c}
 \text{(a)} \quad \frac{\frac{p \vee p \text{ (1)}}{p} \quad \frac{\frac{p \text{ (2)}}{q} \quad p \rightarrow q \rightarrow E}{q} \quad \frac{p \text{ (3)}}{q} \quad p \rightarrow q \rightarrow E}{q \vee E \text{ (2) (3)}}}{\frac{q}{q \vee q} \vee I} \rightarrow I \text{ (1)} \\
 \\
 \text{(b)} \quad \frac{p \quad \frac{\frac{p \leftrightarrow q \text{ (1)}}{p \rightarrow q} \leftrightarrow E}{q} \rightarrow E \quad \neg q}{\perp} \neg E \\
 \hline
 \neg(p \leftrightarrow q) \neg I \text{ (1)}
 \end{array}$$

2. Låt $\sigma = \{p\}$ vara en satslogisk signatur. Definiera rekursivt följande formel φ_0 är formeln p och φ_{n+1} definieras som formeln $(\varphi_n \leftrightarrow p)$.

(a) Vad betyder det för en satslogisk formel φ att vara en tautologi?

(b) För vilka n är φ_n en tautologi? Visa ditt svar med hjälp av induktion.

Lösning 2.

(a) En satslogisk formel φ i $LP(\sigma)$ i satslogikens språk med signatur σ är en tautologi om för varje σ -struktur $\mathfrak{A}: \sigma \rightarrow \{0, 1\}$, vi har $\mathfrak{A}^*(\varphi) = 1$.

(b) För att få en idé räkna vi ut de första formeln φ_n och ställa upp sanningsvärdestabell

p	$p \leftrightarrow p$	$(p \leftrightarrow p) \leftrightarrow p$	$((p \leftrightarrow p) \leftrightarrow p) \leftrightarrow p$	...
0	1	0	1	...
1	1	1	1	...

Det verkar så att alla φ_n med jämna n har samma sanningsvärde som p , däremot är alla φ_n med udda n tautologier (eftersom motsvarande kolonnen består endast av ettor). Vi visar detta nu genom induktion, dvs vi visar att

$$\mathfrak{A}^*(\varphi_{2n}) = \mathfrak{A}(p) \text{ och } \mathfrak{A}^*(\varphi_{2n+1}) = 1.$$

Induktionsbörjan är att $\mathfrak{A}^*(\varphi_{2 \cdot 0}) = \mathfrak{A}^*(p) = \mathfrak{A}(p)$. För induktionssteget har vi två fall:

- Anta att $\mathfrak{A}^*(\varphi_{2n}) = \mathfrak{A}(p)$ för någon n , då måste vi visa att $\mathfrak{A}^*(\varphi_{2n+1}) = 1$. Vi har att $\mathfrak{A}^*(\varphi_{2n+1}) = \mathfrak{A}^*(\varphi_{2n} \leftrightarrow p) = 1$ eftersom $\mathfrak{A}^*(\varphi_{2n}) = \mathfrak{A}^*(p)$.
 - Anta att $\mathfrak{A}^*(\varphi_{2n+1}) = 1$ för någon n , då måste vi visa att $\mathfrak{A}^*(\varphi_{2n+2}) = \mathfrak{A}(p)$. Vi har att $\mathfrak{A}^*(\varphi_{2n+2}) = \mathfrak{A}^*(\varphi_{2n+1} \leftrightarrow p) = \begin{cases} 0 & \text{om } \mathfrak{A}^*(p) = 0 \\ 1 & \text{om } \mathfrak{A}^*(p) = 1 \end{cases} = \mathfrak{A}^*(p) = \mathfrak{A}(p)$.
- Påstående att φ_n är en tautologi om och endast om n är udda följer därmed genom fullständig induktion.

3. Låt $\sigma = \{p, q, r\}$ vara en satslogisk signatur. Låt φ vara formeln $(p \wedge r) \leftrightarrow (\neg q \vee r)$.

- Ange en formel ψ i disjunktiv normalform som är logiskt ekvivalent med φ .
- Ange en formel χ i konjunktiv normalform som är logiskt ekvivalent med φ .

Lösning 3, Möjlighet A. Vi börjar med att ställa upp φ :s sanningsvärdestabell.

p	q	r	$p \wedge r$	$\leftrightarrow$	$(\neg q \vee r)$
0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	1
0	1	0	0	1	0
0	1	1	0	0	1
1	0	0	0	0	1
1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	0
1	1	1	1	1	0

- För att få ψ i disjunktiv normalform skriver vi ner konjunktioner som motsvarar etterna i kolonnen som tillhör φ :s huvudkonnektiv $\leftrightarrow$ och förknyter de med disjunktioner. Då får vi

$$(\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \wedge (p \wedge q \wedge r).$$

- För att få χ i konjunktiv normalform skriver vi ner disjunktioner som motsvarar nollorna i kolonnen som tillhör φ :s huvudkonnektiv $\leftrightarrow$ och förknyter de med konjunktioner. Då får vi

$$(p \vee q \vee r) \wedge (p \vee q \vee \neg r) \vee (p \vee \neg q \vee \neg r) \vee (\neg p \vee q \vee r).$$

Lösning 3, Möjlighet B.

I en alternativ lösning använder vi välkända logiska ekvivalenser för att först eliminerar alla konnektiv förutom $\neg, \vee, \wedge$ och sedan ha $\neg$ -symboler närmast atomer:

$$\begin{aligned} & (p \wedge r) \leftrightarrow (\neg q \vee r) \\ \text{eq } & ((p \wedge r) \wedge (\neg q \vee r)) \vee (\neg(p \wedge r) \wedge \neg(\neg q \vee r)) \\ \text{eq } & ((p \wedge r) \wedge (\neg q \vee r)) \vee ((\neg p \vee \neg r) \wedge ((\neg \neg q) \wedge \neg r)) \\ \text{eq } & ((p \wedge r) \wedge (\neg q \vee r)) \vee ((\neg p \vee \neg r) \wedge (q \wedge \neg r)) \end{aligned}$$

Vi användade följande välkända logiska ekvivalenser $(\psi \leftrightarrow \chi) \text{eq} ((\psi \wedge \chi) \vee (\neg \psi \wedge \neg \chi))$, de Morgans lagar samt $\neg \neg \psi \text{eq} \psi$. Vi fortsätter med att använda distributiva lagen, men vilka beror på om vi är efter disjunktiv eller konjunktiv normalform.

(a)

$$\begin{aligned}
& ((p \wedge r) \wedge (\neg q \vee r)) \vee ((\neg p \vee \neg r) \wedge (q \wedge \neg r)) \\
& \text{eq}((p \wedge r \wedge \neg q) \vee (p \wedge r \wedge r)) \vee ((\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg r \wedge q \wedge \neg r)) \\
& \text{eq}(p \wedge r \wedge \neg q) \vee (p \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (q \wedge \neg r) \\
& \text{eq}(p \wedge r) \vee (q \wedge \neg r)
\end{aligned}$$

Sista steget är inte nödvändigt här, det är redan i disjunktiv normalform tidigare, men resultatet är snyggare då.

$$\begin{aligned}
& ((p \wedge r) \wedge (\neg q \vee r)) \vee ((\neg p \vee \neg r) \wedge (q \wedge \neg r)) \\
& \text{eq}((p \wedge r) \vee (\neg p \vee \neg r)) \wedge ((\neg q \vee r) \vee (\neg p \vee \neg r)) \wedge ((p \wedge r) \vee (q \wedge \neg r)) \wedge ((\neg q \vee r) \vee (q \wedge \neg r)) \\
(b) \quad & \text{eq}((p \wedge r) \vee (\neg p \vee \neg r)) \wedge ((p \wedge r) \vee (q \wedge \neg r)) \wedge ((\neg q \vee r) \vee (q \wedge \neg r)) \\
& \text{eq}(p \vee \neg p \vee \neg r) \wedge (r \vee \neg p \vee \neg r) \wedge (p \vee q) \wedge (p \vee \neg r) \wedge (q \vee r) \wedge (r \vee \neg r) \wedge (\neg q \vee r \vee q) \wedge (\neg q \vee r \vee \neg r) \\
& \text{eq}(p \vee q) \wedge (p \vee \neg r) \wedge (q \vee r)
\end{aligned}$$

där vi användade den distributiva lagen samt att $\psi \vee \neg\psi$ är en tautologi.

4. Vilka av följande påståenden stämmer eller inte stämmer? Motivera dina svar genom att ge ett bevis när påståendet stämmer och ett motexempel när påståendet inte stämmer.

- (a) Om φ_1 , φ_2 och ψ är satslogiska formler i $LP(\sigma)$ och $p \in \sigma$ så att $\varphi_1[\psi/p] = \varphi_2[\psi/p]$, då är $\varphi_1 = \varphi_2$.
- (b) Om en formel i första ordningens logik är osatisfierbar, då är den falsifierbar.
- (c) Om en formel φ i första ordningens logik är i prenexnormalform, då är även varje formel ψ , som är logiskt ekvivalent med φ , i prenexnormalform.

Lösning 4.

- (a) Det stämmer inte. Tar som motexempel $\varphi_1 = p$ och $\varphi_2 = \psi = q$. Då är $\varphi_1[\psi/p] = q = \varphi_2[\psi/p]$, men $\varphi_1 \neq \varphi_2$.
- (b) Det stämmer. Att en formel i första ordningens logik är osatisfierbar betyder att det är falsk i alla strukturer. Då är den även falsifierbar eftersom det finns minst en struktur för varje signatur (tar mängden $\{0\}$, alla konstanter är 0, alla funktioner avbildar alla (det finns bara ett) element till 0 och alla relationer toma).
- (c) Det stämmer inte. Ett motexempel ges av $\exists x \neg(x \doteq x)$ som är i prenexnormalform, men är ekvivalent med $\neg \forall x(x \doteq x)$, som inte är i prenexnormalform.

5. Låt σ vara en signatur i första ordningens logik med en ett-ställig funktionssymbol $\bar{f}$ (och inga konstant- eller relationssymboler). Visa följande sekventer genom att ge ett formellt bevis i naturlig deduktion. När du använder en av de reglerna med speciella krav, $\forall I$ och $\exists E$, argumentera noggrant varför du får använda den.

- (a) $\forall x(\bar{f}(x) \doteq x) \vdash \forall x(\bar{f}(x) \doteq \bar{f}(\bar{f}(x)))$,
- (b) $\vdash \forall x \forall y (\neg(x \doteq y) \rightarrow \exists z((x \doteq z) \wedge \neg(y \doteq z)))$.

Lösning 5, Möjlighet A.

$$(a) \quad \frac{\frac{\forall x(f(x) \doteq x)}{\bar{f}(\bar{f}(x)) \doteq \bar{f}(x)} \forall E}{\frac{\bar{f}(x) \doteq \bar{f}(f(x))}{\forall x(\bar{f}(x) \doteq \bar{f}(f(x)))} \forall I} \doteq \text{symm}$$

Här får vi använda $\forall I$ eftersom variabeln x förekommer endast bunden i premissen $\forall x(\overline{f}(x) \doteq x)$ ovanför.

$$\begin{array}{c}
\frac{\frac{y \dot{=} x}{x \dot{=} y} \doteq \text{symm} \quad \frac{\neg(x \dot{=} y) \textcircled{1}}{\neg E}}{\frac{\frac{\dot{=}}{x \dot{=} x} \doteq I \quad \frac{\frac{\perp}{\neg(y \dot{=} x)} \neg I \textcircled{2}}{\wedge I}}{\frac{(x \dot{=} x) \wedge \neg(y \dot{=} x)}{\exists I} \exists I} \rightarrow I \textcircled{1}} \rightarrow I \textcircled{1} \\
\frac{\neg(x \dot{=} y) \rightarrow \exists z(x \dot{=} z) \wedge \neg(y \dot{=} z)}{\forall y(\neg(x \dot{=} y) \rightarrow \exists z(x \dot{=} z) \wedge \neg(y \dot{=} z))} \forall I \\
\frac{\forall y(\neg(x \dot{=} y) \rightarrow \exists z(x \dot{=} z) \wedge \neg(y \dot{=} z))}{\forall x \forall y(\neg(x \dot{=} y) \rightarrow \exists z(x \dot{=} z) \wedge \neg(y \dot{=} z))} \forall I
\end{array}$$

Här är båda $\forall I$ tillåten eftersom det finns inga ostrykna premisser när de dyker upp.

Lösning 5, Möjlighet B. I möjlighet A användade vi $\doteq$ symm vilket inte är ett axiom, men en herled regel. Därför ger vi en alternativ möjlighet utan att använda den. Anledningen varför vi får använda $\forall I$ är samma som i möjlighet A.

$$(a) \quad \frac{\frac{\forall x(\bar{f}(x) \doteq x)}{\bar{f}(\bar{f}(x)) \doteq \bar{f}(x)} \forall E \quad \frac{\cdot}{\bar{f}(\bar{f}(x)) \doteq \bar{f}(\bar{f}(x))} \doteq I}{\frac{\bar{f}(x) \doteq \bar{f}(\bar{f}(x))}{\forall x(\bar{f}(x) \doteq \bar{f}(\bar{f}(x)))} \forall I} \doteq E$$

[illegible]

6. Låt σ vara en signatur i första ordningens logik med två ett-ställiga relationssymboler $\overline{P}$ och $\overline{Q}$ (och inga konstantsymboler eller funktionssymboler).

- (a) Visa att $\exists x \overline{P}(x) \rightarrow \exists x \overline{Q}(x) \models \exists x (\overline{P}(x) \rightarrow \overline{Q}(x))$.
- (b) Gäller även $\exists x (\overline{P}(x) \rightarrow \overline{Q}(x)) \models \exists x \overline{P}(x) \rightarrow \exists x \overline{Q}(x)$? Motivera ditt svar.

Lösning 6, Möjlighet A.

- (a) Vi vill visa att varje struktur $\mathfrak{A} = \langle A; P_{\mathfrak{A}}, Q_{\mathfrak{A}} \rangle$ så att $\exists x \bar{P}(x) \rightarrow \exists x \bar{Q}(x)$ är sann i $\mathfrak{A}$ uppfyller också att $\exists x (\bar{P}(x) \rightarrow \bar{Q}(x))$ är sann i $\mathfrak{A}$. Låt alltså $\mathfrak{A}$ vara en struktur så att $\exists x \bar{P}(x) \rightarrow \exists x \bar{Q}(x)$ är sann i $\mathfrak{A}$. Enligt den rekursiva definitionen av vad det betyder att en formel är sann i $\mathfrak{A}$, innebär det att $\exists x \bar{P}(x)$ är falsk i $\mathfrak{A}$ eller $\exists x \bar{Q}(x)$ är falsk i $\mathfrak{A}$. Vi vill visa att $\exists x (\bar{P}(x) \rightarrow \bar{Q}(x))$ är sann i $\mathfrak{A}$. Enligt den rekursiva definitionen betyder det att det finns $a \in A$ så att $\bar{P}(\bar{a}) \rightarrow \bar{Q}(\bar{a})$ är sann i $\mathfrak{A}$ (här är $\bar{a}$ konstantsymbolen som motsvarar $a \in A$). Vi gör en falluppdelning. Om $\exists x \bar{P}(x)$ är falsk i $\mathfrak{A}$, tar en godtycklig $a \in A$ (det är möjligt eftersom A inte är tom). Då är $\bar{P}(\bar{a}) \rightarrow \bar{Q}(\bar{a})$ sann i $\mathfrak{A}$ eftersom $\bar{P}(\bar{a})$ är falsk i $\mathfrak{A}$. Om istället $\exists x \bar{Q}(x)$ är sann i $\mathfrak{A}$ betyder det att det finns $a \in A$ så att $\bar{Q}(\bar{a})$ är sann i $\mathfrak{A}$. Då är även $\bar{P}(\bar{a}) \rightarrow \bar{Q}(\bar{a})$ sann i $\mathfrak{A}$. I varje fall finns det alltså $a \in A$ så att $\bar{P}(\bar{a}) \rightarrow \bar{Q}(\bar{a})$ är sann i $\mathfrak{A}$ vilket var vad vi ville visa.
- (b) Nej. Det är kanske enklare att se om vi ersätter båda formler med logiskt ekvivalenta formler $\exists x (\bar{P}(x) \rightarrow \bar{Q}(x))$ är ekvivalent med $\exists x (\neg \bar{P}(x) \vee \bar{Q}(x))$ och $\exists x \bar{P}(x) \rightarrow \exists x \bar{Q}(x)$ är logiskt ekvivalent med $\neg(\exists x \bar{P}(x) \vee \exists x \bar{Q}(x))$ vilket i sin tur är logiskt ekvivalent med $\forall x \neg \bar{P}(x) \vee \exists x \bar{Q}(x)$. Vi vill konstruera ett motexempel, dvs en struktur $\mathfrak{A}$ så att $\exists x (\bar{P}(x) \rightarrow \bar{Q}(x))$ är sann i $\mathfrak{A}$ men $\exists x \bar{P}(x) \rightarrow \exists x \bar{Q}(x)$ är falsk. Då kan det inte finnas x så att $\bar{Q}(x)$, annars är även den andra sann. Därför måste $Q_{\mathfrak{A}}$ vara tom. Å andra sidan betyder att den andra är falsk att $\forall x \neg \bar{P}(x)$ är falsk, alltså att det finns x i $P_{\mathfrak{A}}$. Men även $\exists x (\neg \bar{P}(x) \vee \bar{Q}(x))$ ska vara sann, men eftersom $Q_{\mathfrak{A}}$ är tom, så måste det även finnas x som inte är i $P_{\mathfrak{A}}$. En möjlighet för en sådant struktur har $A = \{a, b\}$, $Q_{\mathfrak{A}} = \emptyset$ samt $P_{\mathfrak{A}} = \{a\}$. Här är $\exists x (\bar{P}(x) \rightarrow \bar{Q}(x))$ sann (man ser det om man tar b för x), men $\exists x \bar{P} \rightarrow \exists x \bar{Q}(x)$ är falsk (det finns ingen x i $Q_{\mathfrak{A}}$, men det finns x i $P_{\mathfrak{A}}$).

Lösning 6, Möjlighet B.

- (a) Enligt sundhetssatsen är det tillräckligt att visa $\exists x \bar{P}(x) \rightarrow \exists x \bar{Q}(x) \vdash \exists x (\bar{P}(x) \rightarrow \bar{Q}(x))$ genom att ge ett bevis i naturlig deduktion. Eftersom den är relativt stor visar vi en del separat.

$$\begin{array}{c}
 \frac{\frac{\neg \exists x \bar{P}(x) \text{ (2)}}{\neg \exists x \bar{P}(x) \vee \exists x \bar{Q}(x)} \vee I \quad \frac{\frac{\frac{\frac{\exists x \bar{Q}(x) \text{ (4)}}{\neg \exists x \bar{P}(x) \vee \exists x \bar{Q}(x)} \vee I \quad \neg(\neg \exists x \bar{P}(x) \vee \exists x \bar{Q}(x)) \text{ (1)}}{\perp} \neg I(4)}{\neg \exists x \bar{Q}(x)} \neg E}{\exists x \bar{P}(x)} \neg E}{\neg \exists x \bar{P}(x) \vee \exists x \bar{Q}(x)} \neg E \\
 \frac{\frac{\frac{\frac{\exists x \bar{P}(x) \text{ (3)}}{\exists x \bar{P}(x)} \quad \frac{\exists x \bar{P}(x) \rightarrow \exists x \bar{Q}(x)}{\exists x \bar{Q}(x)} \rightarrow E}{\exists x \bar{Q}(x)} \rightarrow E}{\perp} \neg I(3)}{\neg \exists x \bar{P}(x)} \neg E \\
 \frac{\frac{\perp}{\neg \exists x \bar{P}(x) \vee \exists x \bar{Q}(x)} \text{ RAA(2)}}{\perp} \text{ RAA(1)}
 \end{array}$$

Den första del kan vi nu använda för en falluppdelning i $\vee E$ -steget i huvudbeviset:

$$\begin{array}{c}
 \frac{\frac{\frac{\bar{P}(x) \text{ (7)}}{\exists x \bar{P}(x)} \exists I \quad \frac{\neg \exists x \bar{P}(x) \text{ (5)}}{\neg \exists x \bar{P}(x)} \neg E}{\perp} \neg I}{\neg \bar{P}(x)} \neg E \\
 \frac{\frac{\bar{P}(x) \text{ (7)}}{\perp} \text{ RAA} \quad \frac{\frac{\bar{P}(x) \text{ (7)}}{\bar{Q}(x)} \rightarrow I(7)}{\bar{P}(x) \rightarrow \bar{Q}(x)} \exists I}{\exists x (\bar{P}(x) \rightarrow \bar{Q}(x))} \exists I \\
 \frac{\frac{\frac{\bar{Q}(x) \text{ (8)}}{\bar{P}(x) \rightarrow \bar{Q}(x)} \rightarrow I \quad \frac{\frac{\exists x \bar{Q}(x) \text{ (6)}}{\exists x (\bar{P}(x) \rightarrow \bar{Q}(x))} \exists E(8)}{\exists x (\bar{P}(x) \rightarrow \bar{Q}(x))} \vee E(5)(6)}{\exists x (\bar{P}(x) \rightarrow \bar{Q}(x))} \vee E(5)(6)
 \end{array}$$

Här får vi använda $\exists E$ eftersom x inte förekomma fritt i $\exists x (\bar{P}(x) \rightarrow \bar{Q}(x))$ och det finns inga andra uestrykna premisser ovanför $\exists x (\bar{P}(x) \rightarrow \bar{Q}(x))$ förutom $\bar{Q}(x)$.

- (b) Ett motexempel ges av $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{N}; P, Q \rangle$ där $Q \subseteq \mathbb{N}$ är toma mängden och $P \subseteq \mathbb{N}$ är mängden av alla primtal. Då är $\exists x (\bar{P}(x) \rightarrow \bar{Q}(x))$ sann i $\mathfrak{A}$ eftersom vi kan ta $x = 4$.

Men $\exists x \overline{P}(x) \rightarrow \exists x \overline{Q}(x)$ är falsk eftersom $x = 2$ är så att $P(2)$ är sann ty 2 är ett primtal, men $Q(2)$ är falsk eftersom Q är tom.

7. Låt σ vara en signatur i första ordningens logik med en konstantsymbol $\overline{1}$, en ettställig relationssymbol $\overline{P}$ samt en tvåställig relationssymbol $\overline{D}$. Vi betraktar σ -strukturen $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{N}; 1_{\mathbb{N}}; P_{\mathbb{N}}, D_{\mathbb{N}} \rangle$ där $1_{\mathbb{N}}$ är den vanliga 1, $P_{\mathbb{N}}(x)$ om x är ett primtal och $D_{\mathbb{N}}(m, n)$ om m delar n , dvs det finns $k \in \mathbb{N}$ med $m \cdot k = n$.

- (a) Ange en formel φ i första ordningens logik med signatur σ som uttrycker: "Ett tal x är ett primtal om och endast om varje delare av x är lika med 1 eller x själv."
- (b) Är formeln φ du har givit i (a) satisfierbar? Är den falsifierbar? Motivera ditt svar.

Lösning 7.

- (a) En formel som uttrycker den angivna meningen är:

$$\forall x (\overline{P}(x) \leftrightarrow (\forall y (\overline{D}(y, x) \rightarrow (y \doteq \overline{1} \vee y \doteq x))).$$

- (b) Formeln är satisfierbar. Vi kan ta $\mathfrak{B} = \langle \{b\}; b; P_{\mathfrak{B}} = \{b\}, D_{\mathfrak{B}} = \emptyset \rangle$. Då är $P_{\mathfrak{B}}(x)$ sann, men $D_{\mathfrak{B}}(b, b)$ är falsk, så att $D_{\mathfrak{B}}(b, b) \rightarrow (b = b \vee b = b)$ är sann. Därför är formeln sann i $\mathfrak{B}$. Den är också falsifierbar eftersom den är falsk i $\mathfrak{A}$. Det naturliga talet $x = 1$ är inte ett primtal, men uppfyller att om y delar 1 då är $y = 1$ eller $y = x = 1$.

8. Låt $\sigma = \langle \{\overline{x}, \overline{y}\}; \overline{R}; \emptyset \rangle$ vara en signatur i första ordningens logik med två konstantsymboler, en tvåställig relationssymbol och inga funktionssymboler. Vi tolkar en σ -struktur $\mathfrak{A} = \langle A; x_A, y_A; R_A \rangle$ som en riktad graf med nodmängd A , två speciella noder x_A och y_A och relationen $R_A(u, v)$ som säger att det finns en kant från noden u till noden v .

- (a) Ange en σ -struktur för följande graf $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4$ med speciala noder 1 och 4.
- (b) Ange en formel φ som uttrycker att det inte finns en väg av längd 3 från x_A till y_A , dvs z_1 och z_2 och kanter $x_A \rightarrow z_1 \rightarrow z_2 \rightarrow y_A$.
- (c) Visa att det inte finns en mängd formler Γ i första ordningens logik med signatur σ så att $\mathfrak{A} \models \Gamma$ om och endast om det finns n och n stycken noder $z_1, \dots, z_n$ med kanter som i följande bild

$$x_A \rightarrow z_1 \rightarrow z_2 \rightarrow \dots \rightarrow z_n \rightarrow y_A.$$

Lösning 8.

- (a) En σ -struktur för den angivna grafen är $A = \{1, 2, 3, 4\}$ med $x_A = 1$, $y_A = 4$ och $R_A = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$.
- (b) En formel φ som uttrycker det är $\neg(\exists z_1 \exists z_2 (\overline{R}(\overline{x}, z_1) \wedge \overline{R}(z_1, z_2) \wedge \overline{R}(z_2, \overline{y})))$.
- (c) För $n \in \mathbb{N}$ låt φ_n vara en formel liknande den i (b) som säger att det inte finns en väg av längd $n + 1$ från x_A till y_A , nämligen:

$$\neg(\exists z_1 \dots \exists z_n (R(\overline{x}, z_1) \wedge R(z_1, z_2) \wedge \dots \wedge R(z_{n-1}, z_n) \wedge R(z_n, \overline{y})))$$

Anta nu att Γ är en mängd formler som i (c). Betrakta mängden $\tilde{\Gamma} = \Gamma \cup \{\varphi_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Då är varje ändlig delmängd av $\tilde{\Gamma}$ satisfierbar: Om $\Gamma' \subseteq \tilde{\Gamma}$ är en ändlig delmängd, låt m vara den maximala n så att φ_n är med i Γ' . Då är den strukturen given som $\mathfrak{B}$ med

$B = \{x_B, z_1, \dots, z_{m+1}, y_B\}$, med $R_B = \{(x_B, z_1), (z_1, z_2), \dots, (z_m, z_{m+1}), (z_{m+1}, y_B)\}$
 en modell för Γ' . Kompakthetssatsen för första ordningens logik medför då att även $\tilde{\Gamma}$ är satisfierbar. Men en modell $\mathfrak{C}$ för $\tilde{\Gamma}$ skulle uppfylla att det finns n och n stycken
 noder $z_1, \dots, z_n$ med kanter $x_C \rightarrow z_1 \rightarrow z_2 \rightarrow \dots \rightarrow z_n \rightarrow y_C$ (eftersom C är en modell
 för Γ), men också att för varje n det finns inte $z_1, \dots, z_n$ med kanter $x_C \rightarrow z_1 \rightarrow z_2 \rightarrow$
 $\dots \rightarrow z_n \rightarrow y_C$ (eftersom C är en modell för $\{\varphi_n \mid n \in \mathbb{N}\}$), en motsägelse.