

Skrivtid: 14:00–19:00. Tillåtna hjälpmedel: Endast skrivdon. Tentan består av 8 uppgifter och varje uppgift är värd 5 poäng. Totalt krävs 18 poäng för betyget 3, 25 poäng för betyget 4 och 32 poäng för betyget 5. Alla lösningar ska innehålla fullständiga resonemang och inte bara svar. Bonuspoäng från inlämningsuppgifterna räknas inte för denna omtentamen.

1. Låt $\sigma = \{p, q\}$ vara en satslogisk signatur. Visa följande sekvenser genom att ge ett formellt bevis i naturlig deduktion.

(a) $\neg p \vee \neg q \vdash \neg(p \wedge q)$,

(b) $\vdash \neg p \rightarrow (p \rightarrow q)$.

2. Vilka av följande påståenden stämmer eller inte stämmer? Motivera dina svar genom att ge ett bevis när påståendet stämmer och ett motexempel när påståendet inte stämmer.

(a) Låt φ vara den satslogiska formeln $q \rightarrow q$. Låt χ vara formeln $\neg(p \wedge p) \vee (p \wedge p)$ i satslogik. Det finns ingen formel ψ så att χ är den substituerade formeln $\varphi[\psi/q]$.

(b) Det finns ingen satslogisk formel så att varje delformel är en tautologi.

(c) När en mängd Γ av satslogiska formler är inkonsistent, så är varje formel i Γ en tautologi.

3. Låt $\sigma = \{p, q, r\}$ vara en satslogisk signatur. Låt φ vara formeln $\neg(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$.

(a) Ange en formel ψ i disjunktiv normalform som är logiskt ekvivalent med φ .

(b) Ange en formel χ i konjunktiv normalform som är logiskt ekvivalent med φ .

4. Låt $\sigma = \{p\}$ vara en satslogisk signatur. Låt $\mathcal{F}$ vara mängden av alla satslogiska formler som endast använder $\wedge$ (och ingen av $\neg, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \perp$).

(a) Ange en induktiv definition av mängden $\mathcal{F}$.

(b) Visa med hjälp av induktion över formler i $\mathcal{F}$ att om φ är en formel i $\mathcal{F}$, så är antalet p -symboler i φ ett fler än antalet $\wedge$ -symboler i φ .

(c) Visa med hjälp av induktion över formler i $\mathcal{F}$ att varje satslogisk formel i $\mathcal{F}$ är logiskt ekvivalent med p .

Var god vänd!

5. Låt σ vara en signatur i första ordningens logik med två ett-ställiga relationssymboler $\overline{P}$, $\overline{Q}$ samt en konstantsymbol $\overline{c}$, men inga funktionssymboler.

- (a) Visa att $\overline{P}(\overline{c}) \wedge \forall x(\overline{P}(x) \rightarrow \overline{Q}(x)) \models \exists y\overline{Q}(y)$.
- (b) Gäller $\exists y\overline{Q}(y) \models \forall x(\overline{P}(x) \rightarrow \overline{Q}(x))$? Motivera ditt svar.

6. Låt σ vara en signatur i första ordningens logik med en ett-ställig relationssymbol $\overline{P}$ och två konstantsymboler $\overline{a}$ och $\overline{b}$ (och inga funktionssymboler).

- (a) Visa att $\{\overline{P}(\overline{a}), \neg\overline{P}(\overline{b})\} \vdash (\overline{a} \doteq \overline{a}) \wedge \neg(\overline{a} \doteq \overline{b})$.
- (b) Gäller även $\{\overline{a} \doteq \overline{a}, \neg(\overline{a} \doteq \overline{b})\} \vdash \overline{P}(\overline{a}) \wedge \neg\overline{P}(\overline{b})$? Motivera ditt svar.

7. Låt σ vara en signatur i första ordningens logik med en två-ställig funktionssymbol $\overline{+}$, en konstantsymbol $\overline{1}$ men inga relationssymboler. Vi betraktar σ -strukturen $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{N}; 1_{\mathbb{N}}; \emptyset; + \rangle$.

- (a) Ange en formel $\varphi(x)$ i första ordningens logik med signatur σ som uttrycker “ x är jämn.” samt en formel $\psi(x)$ som uttrycker “ x är udda.”
- (b) Är formeln $\forall x(\varphi(x) \vee \psi(x))$ där $\varphi(x)$ och $\psi(x)$ är som i (a) satisfierbar? Är den falsifierbar? Motivera ditt svar.

8. Låt A vara en mängd. Låt $\langle \{\overline{a} \mid a \in A\}; \overline{\leq}; \emptyset \rangle$ vara en signatur i första ordningens logik med en konstantsymbol $\overline{a}$ för varje $a \in A$, en två-ställig relationssymbol $\overline{\leq}$ och inga funktionssymboler. Låt

$$\mathcal{T} = \{\forall x(x \overline{\leq} x), \forall x \forall y((x \overline{\leq} y \wedge y \overline{\leq} x) \rightarrow (x \doteq y)), \forall x \forall y \forall z((x \overline{\leq} y \wedge y \overline{\leq} z) \rightarrow x \overline{\leq} z), \forall x \forall y(x \overline{\leq} y \vee y \overline{\leq} x)\}.$$

$$\text{Låt } \mathcal{S} = \{\neg(\overline{a} \doteq \overline{b}) \mid a, b \in A, a \neq b\}.$$

- (a) Ange en modell för $\mathcal{T}$ samt en modell för $\mathcal{S}$. Motivera ditt svar.
- (b) Visa att varje ändlig delmängd av $\mathcal{T} \cup \mathcal{S}$ är satisfierbar genom att ange en modell för den. Motivera ditt svar.
- (c) Visa att det finns en två-ställig relation $\leq$ på A så att $(\{a \mid a \in A\}; \leq; \emptyset)$ är en modell för $\mathcal{T} \cup \mathcal{S}$.

Lycka till!