UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Joel Dahne

1MA032 Ordinära differentialekvationer I
MaKand, FyKand, STS, fristående
2022–05–30

Tillåtna hjälpmedel: skrivdon. Varje problem ger maximalt 5 poäng. För betygen 3, 4 och 5 krävs 18, 25 och 32 poäng. Lösningarna måste återföljas av förklarande text.

1. **a)** Bestäm lösningen till initialvärdesproblemet

$$y' = \frac{x \cos x}{e^y}, \quad y(\pi) = 4.$$

Är lösningen definierad på hela $\mathbb{R}$?

b) Ge exempel på en exakt ODE där lösningarna ges implicit av

$$y^2 = \sin(e^x + x) + C.$$

(5 poäng)

2. **a)** Bestäm den allmänna lösningen till

$$2y'' + 8y' = e^{2x} + 1$$

b) Ge exempel på en andra ordningens linjär ODE med konstanta koefficienter som har

$$y_1(x) = 1 + x^3 \sin(x) \quad \text{och} \quad y_2(x) = e^{-4x} + x^3 \sin(x)$$

som lösningar.

(5 poäng)

3. Betrakta ODE:n

$$(x-1)y'' - xy' + y = 0 \quad , x > 0.$$

a) Visa att $y_1(x) = e^x$ är en lösning.

b) Bestäm den allmänna lösningen till ODE:n.

(5 poäng)

4. Betrakta ODE:n

$$x^2 y'' + x(x+5)y' + 4y = 0.$$

a) Visa att $x = 0$ är den **enda** singulära punkten för ekvationen samt att det är en reguljär singulär punkt.

b) Ge indikalekvationen (*indicial equation*) och dess rötter.

c) Ge formen på det två serielösningar som ges av Frobenious metod. Du behöver i det här steget **inte** bestämma koefficienterna i serierna. Notera att vi **inte** antar att $x > 0$.

d) Bestäm koefficienterna till **en** av dessa två serielösningar. Ge värdet på alla koefficienter i sluten form, det vill säga inte bara en som en differensekvation.

(5 poäng)

5. Låt
$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \quad \text{och} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1-a \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestäm den allmänna lösningen till $X' = AX$ för alla värden på parametern $a \in \mathbb{R}$. Ge lösningen på reell form, det vill säga inga komplexa tal ska förekomma i lösningen.

b) Skissa fasporträttet för $a = 0$

(5 poäng)

6. Bestäm den allmänna lösningen till systemet
$$\begin{cases} x' &= 2y + \dfrac{e^{4t}}{1+t^2} \\ y' &= -4x + 6y + \dfrac{2e^{4t}}{1+t^2}. \end{cases}$$

(5 poäng)

7. Betrakta ODE:n
$$u'' + f(u)u' + g(u) = 0,$$
där f och g är kontinuerliga funktioner.

a) Skriv om ekvationen som ett system av första ordningens ekvationer.

b) Bestäm de kritiska punkterna i termer av nollställen till f och g.

c) Visa att om f och g båda är två gånger kontinuerligt deriverbara (d.v.s. $f, g \in C^2$) så bestäms stabiliteten vid en kritisk punkt (x_0, y_0) av rötterna till polynomet
$$\lambda^2 + f(x_0)\lambda + g'(x_0),$$
så länge $g'(x_0) \neq 0$ eller rötterna är rent imaginära.

(5 poäng)

8. Betrakta systemet
$$\begin{cases} x' &= xy - x^3 \\ y' &= -y^3 - 3x^4 \end{cases}.$$

a) Bestäm alla kritiska punkter till systemet och visa att de är isolerade.

b) Bestäm stabiliteten hos origo. *Ledning: Sök efter en lämplig Lyapunovfunktion på formen* $V(x,y) = ax^k + by^l$.

(5 poäng)