UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Joel Dahne

1MA032 Ordinära differentialekvationer I
MaKand, FyKand, STS, fristående
2022–05–30

Tillåtna hjälpmedel: skrivdon. Varje problem ger maximalt 5 poäng. För betygen 3, 4 och 5 krävs 18, 25 och 32 poäng. Lösningarna måste återföljas av förklarande text.

1. **a)** Bestäm lösningen till initialvärdesproblemet

$$y' = \frac{x\cos x}{e^y}, \quad y(\pi) = 4.$$

Är lösningen definierad på hela $\mathbb{R}$?

b) Ge exempel på en exakt ODE där lösningarna ges implicit av

$$y^2 = \sin(e^x + x) + C.$$

(5 poäng)

2. **a)** Bestäm den allmänna lösningen till

$$2y'' + 8y' = e^{2x} + 1$$

b) Ge exempel på en andra ordningens linjär ODE med konstanta koefficienter som har

$$y_1(x) = 1 + x^3\sin(x) \quad \text{och} \quad y_2(x) = e^{-4x} + x^3\sin(x)$$

som lösningar.

(5 poäng)

3. Betrakta ODE:n

$$(x-1)y'' - xy' + y = 0 \quad , x > 0.$$

a) Visa att $y_1(x) = e^x$ är en lösning.

b) Bestäm den allmänna lösningen till ODE:n.

(5 poäng)

4. Betrakta ODE:n

$$x^2y'' + x(x+5)y' + 4y = 0.$$

a) Visa att $x = 0$ är den **enda** singulära punkten för ekvationen samt att det är en reguljär singulär punkt.

b) Ge indikalekvationen (*indicial equation*) och dess rötter.

c) Ge formen på det två serielösningar som ges av Frobenious metod. Du behöver i det här steget **inte** bestämma koefficienterna i serierna. Notera att vi **inte** antar att $x > 0$.

d) Bestäm koefficienterna till **en** av dessa två serielösningar. Ge värdet på alla koefficienter i sluten form, det vill säga inte bara en som en differensekvation.

(5 poäng)

5. Låt

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \quad \text{och} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1-a \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestäm den allmänna lösningen till $X' = AX$ för alla värden på parametern $a \in \mathbb{R}$. Ge lösningen på reell form, det vill säga inga komplexa tal ska förekomma i lösningen.

b) Skissa fasporträttet för $a = 0$

(5 poäng)

6. Bestäm den allmänna lösningen till systemet

$$\begin{cases} x' &= 2y + \dfrac{e^{4t}}{1+t^2} \\ y' &= -4x + 6y + \dfrac{2e^{4t}}{1+t^2}. \end{cases}$$

(5 poäng)

7. Betrakta ODE:n

$$u'' + f(u)u' + g(u) = 0,$$

där f och g är kontinuerliga funktioner.

a) Skriv om ekvationen som ett system av första ordningens ekvationer.

b) Bestäm de kritiska punkterna i termer av nollställen till f och g.

c) Visa att om f och g båda är två gånger kontinuerligt deriverbara (d.v.s. $f, g \in C^2$) så bestäms stabiliteten vid en kritisk punkt (x_0, y_0) av rötterna till polynomet

$$\lambda^2 + f(x_0)\lambda + g'(x_0),$$

så länge $g'(x_0) \neq 0$ eller rötterna är rent imaginära.

(5 poäng)

8. Betrakta systemet

$$\begin{cases} x' &= xy - x^3 \\ y' &= -y^3 - 3x^4 \end{cases}.$$

a) Bestäm alla kritiska punkter till systemet och visa att de är isolerade.

b) Bestäm stabiliteten hos origo. *Ledning: Sök efter en lämplig Lyapunovfunktion på formen* $V(x, y) = ax^k + by^l$.

(5 poäng)

Lösningar till tentan in 1MA032 Ordinära differentialekvationer I 2022–05–30

Lösning till problem 1. **a)** Vi kan använda oss av variabelseparation. Om vi skriver $y' = \dfrac{dy}{dx}$ kan ekvationen skriva som

$$e^y\ dy = x \cos x\ dx.$$

Integrerar vi båda sidor får vi

$$e^y = x \sin x + \cos x + C,$$

vilket ger oss

$$y = \log\left(x \sin x + \cos x + C\right).$$

Sätter vi in $x = \pi$ och $y(\pi) = 4$ får vi ekvationen

$$4 = \log\left(\pi \sin \pi + \cos \pi + C\right).$$

Vilket förenklas till

$$4 = \log(-1 + C),$$

som ger oss $C = e^4 + 1$. Lösningen är alltså

$$y = \log\left(x \sin x + \cos x + e^4 + 1\right).$$

Lösningen är **inte** definierad på hela $\mathbb{R}$. Om x är stort och valt så att $\sin x < 0$ kommer uttrycket innanför parentesen vara negativt, där logaritmen ej är definierad.

b) Lösningarna till en exakt differentialekvation

$$M(x, y) + N(x, y)y' = 0$$

ges implicit av $F(x, y) = C$ där

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = M(x, y), \quad \text{och} \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = N(x, y).$$

Om vi vill att lösningarna ska vara $y^2 = \sin(e^x + x) + C$ kan vi alltså ta

$$F(x, y) = y^2 - \sin(e^x + x).$$

Vilket skulle ge oss

$$M(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = -(e^x + 1)\cos(e^x + x), \quad \text{och} \quad N(x, y) = \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 2y.$$

Vi får alltså differentialekvationen

$$-(e^x + 1)\cos(e^x + x) + 2yy' = 0.$$

Lösning till problem 2. **a)** Vi börjar med att hitta lösningen till den associerade homogena ekvationen $2y'' + 8y' = 0$. Den karakteristiska ekvationen ges av $2r^2 + 8r = 0$, med lösningarna $r_1 = -4$ och $r_2 = 0$. Den allmänna lösningen till den homogena ekvationen ges då av

$$y_h(x) = C_1 e^{-4x} + C_2.$$

For att hitta en partikulärlösning delar vi upp högerledet i två delar, e^x och 1. För e^{2x} är en naturlig gissning för partikulärlösningen $y_{p,1}(x) = Ae^{2x}$, det ger oss

$$y'_{p,1}(x) = 2Ae^{2x},$$
$$y''_{p,1}(x) = 4Ae^{2x}.$$

Sätter vi in detta i ekvationen får vi

$$2y''_{p,1}(x) + 8y'_{p,1}(x) = 8Ae^{2x} + 16Ae^{2x} = 24Ae^{2x}.$$

För att detta ska vara lika med e^{2x} måste vi ha $A = \dfrac{1}{24}$. För 1 skulle en naturlig gissning vara $y_{p,2}(x) = B$, dock löser detta den homogena ekvationen. Vi gör istället gissningen $y_{p,2}(x) = Bx$, vilket ger oss

$$\begin{aligned} y'_{p,2}(x) &= B, \\ y''_{p,2}(x) &= 0. \end{aligned}$$

Insättning ger oss direkt att $B = \dfrac{1}{8}$. En partikulärlösning ges därför av

$$y_p(x) = y_{p,1}(x) + y_{p,2}(x) = \frac{1}{24}e^{2x} + \frac{1}{8}x.$$

Den allmänna lösningen blir då

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1e^{-4x} + C_2 + \frac{1}{24}e^{2x} + \frac{1}{8}x.$$

b) Vi börjar med att notera att $x^3 \sin x$ är en gemensam term för både y_1 och y_2. Om vi skulle hitta en ekvation som har $y_{h,1}(x) = 1$ och $y_{h,2}(x) = e^{-4x}$ som lösningar till den associerade homogena ekvationen och $y_p = x^3 \sin x$ som en partikulärlösning skulle vi direkt får att

$$y_1 = y_{h,1} + y_p$$

och

$$y_2 = y_{h,2} + y_p$$

är lösningar till denna ekvation. Vidare noterar vi att ekvationen i problemet ovan har just $y_{h,1}(x) = 1$ och $y_{h,2}(x) = e^{-4x}$ som lösningar till den associerade homogena ekvationen. Vi behöver bara ändra högerledet så att $x^3 \sin x$ blir en partikulärlösning. Om vi låter $y_p(x) = x^3 \sin x$ kan vi komma fram till vad vi ska välja för högerled genom att helt enkelt sätta in y_p, till att börja med får vi

$$\begin{aligned} y'_p(x) &= 3x^2 \sin x + x^3 \cos x, \\ y''_p(x) &= 6x \sin x + 3x^2 \cos x + 3x^2 \cos x - x^3 \sin x = 6x \sin x + 6x^2 \cos x - x^3 \sin x. \end{aligned}$$

Sätter vi in detta i ekvationen får vi

$$\begin{aligned} 2y''_p(x) + 8y'_p(x) &= 12x \sin x + 12x^2 \cos x - 2x^3 \sin x + 24x^2 \sin x + 8x^3 \cos x \\ &= 12x \sin x + 12x^2(\cos x + 2 \sin x) + 2x^3(4 \cos x - \sin x). \end{aligned}$$

Vi får alltså att $y_p = x^3 \sin x$ är en partikulärlösning till

$$2y'' + 8y' = 12x \sin x + 12x^2(\cos x + 2 \sin x) + 2x^3(4 \cos x - \sin x).$$

Eftersom 1 och e^{-4x} är lösningar till den associerade homogena ekvationen kommer $y_1(x) = 1 + x^3 \sin x$ och $y_2(x) = e^{-4x} + x^3 \sin x$ båda vara lösningar till denna ekvation.

Lösning till problem 3.

Insättning av $y_1(x) = e^x$ ger oss direkt

$$(x - 1)e^x - xe^x + e^x = 0.$$

Vi använder oss av reduktion av ordning. Ansatsen $y_2(x) = u(x)y_1(x) = u(x)e^x$ ger oss

$$y'_2(x) = u'(x)e^x + u(x)e^x, y''_2(x) \qquad = u''(x)e^x + 2u'(x)e^x + u(x)e^x.$$

Sätter vi in detta i ekvationen får vi

$$(x-1)(u''e^x + 2u'e^x + ue^x) - x(u'e^x + ue^x) + ue^x = 0.$$

Vilket vi kan skriva om som

$$u((x-1)e^x - xe^x + e^x) + e^x((x-2)(u'' + 2u') - xu') = 0.$$

Eftersom e^x är en lösning till differentialekvationen blir första termen noll och det förenklas till

$$(x-1)u'' + (x-2)u' = 0.$$

Om vi låter $v = u'$ får vi ekvationen

$$(x-1)v' + (x-2)v = 0,$$

som är separabel. Vi kan lösa den genom att skriva om den som

$$\frac{1}{v}dv = -\frac{x-2}{x-1}dx$$

och integrera. Det ger oss

$$\int \frac{1}{v}\ dv = \log v$$

och

$$-\int \frac{x-2}{x-1}\ dx = -\int 1 - \frac{1}{x-1}\ dx = -x + \log|x-1|,$$

här har vi skippat integrationskonstanterna eftersom vi endast behöver en lösning. Från detta får vi

$$\log v = -x + \log|x-1| \iff v = (x-1)e^{-x},$$

För att få u beräknar vi

$$u(x) = \int v(x)\ dx = \int (x-1)e^{-x}\ dx = -xe^{-x},$$

återigen skippar vi integrationskonstanten.

Går vi tillbaka till vår ansats har vi då

$$y_2(x) = u(x)y_1(x) = -xe^{-x}e^x = -x.$$

Den allmänna lösningen ges slutligen av

$$y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) = C_1e^x - C_2x.$$

Lösning till problem 4. **a)** För att visa att $x = 0$ är den enda singulära punkten börjar vi med att notera att ekvationen kan skrivas som

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

med $p(x) = \dfrac{x+5}{x}$ och $q(x) = \dfrac{4}{x^2}$. Vi ser direkt att $p(x)$ och $q(x)$ båda är singulära i punkten $x = 0$ men inte någon annanstans. För att visa att $x = 0$ är en reguljär singulär punkt kontrollerar vi att $xp(x) = x + 5$ och $x^2q(x) = \cdots + 4$ båda är analytiska, vilket vi ser direkt eftersom de är polynom.

b) Indikalekvationen ges av $r^2 + (p_0 - 1)r + q_0 = 0$ där p_0 är värdet för $xp(x)$ i $x = 0$ och q_0 är värdet för $x^2q(x)$ i $x = 0$. Vi får $p_0 = 5$ och $q_0 = 4$. Det ger oss indikalekvationen $r^2 + 4r + 4 = 0$, som har dubbelroten $r_1 = r_2 = -2$.

c) Enligt Frobenious metod ges en lösning alltid på formen

$$y_1(x) = |x|^{r_1}\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n.$$

Där $a_n \neq 0$. I vårt fall är $r_1 = -2$ och vi får

$$y_1(x) = \frac{1}{x^2}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Formen på den andra lösningen beror på förhållandet mellan rötterna. I det här fallet har vi en dubbelrot och den andra lösningen ges därför på formen

$$y_2(x) = y_1 \log|x| + |x|^{r_1}\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n.$$

För $r_1 = -2$ får vi

$$y_2(x) = y_1 \log|x| + \frac{1}{x^2}\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n.$$

d) Vi bestämmer koefficienterna a_n för y_1 ovan. Vi låter $r = r_1$ och gör räkningarna för $x > 0$, så att vi kan skippa absolutbeloppet, vi får då

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}, \\ y'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1}, \\ y''(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r-2}. \end{aligned}$$

Insättning i ekvationen ger oss

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r+1} + 5\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r} + 4\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0.$$

Division med x^r och justering av index ger oss

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n} + \sum_{n=1}^{\infty}(n+r-1)a_{n-1} x^{n} + 5\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n} + 4\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n} = 0.$$

Om vi tar ut termerna för $n = 0$ och sätter resterande i en summa får vi

$$(r(r-1) + 5r + 4)a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(((n+r)(n+r-1) + 5(n+r) + 4)a_n + (n+r-1)a_{n-1})x^n = 0.$$

Vilken kan förenklas till

$$(r^2 + 4r + 4)a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(((n+r)^2 + 4(n+r) + 4)a_n + (n+r-1)a_{n-1})x^n = 0.$$

Den första termen är noll för rötterna till indikalekvationen, enligt identitetsprincipen får vi även

$$((n+r)^2 + 4(n+r) + 4)a_n + (n+r-1)a_{n-1} = 0$$

for $n \geq 1$. Sätter vi nu in $r = -2$ ger det oss

$$((n-2)^2 + 4(n-2) + 4)a_n + (n-3)a_{n-1} = 0$$

vilket är ekvivalent med differensekvationen

$$a_n = -\frac{n-3}{n^2}a_{n-1}, \quad n \geq 1.$$

Om vi låter a_0 vara obestämd får vi för de följande tre termerna

$$a_1 = 2a_0, \quad a_2 = \frac{1}{4}a_1 = \frac{1}{2}a_0, \quad a_3 = 0.$$

Eftersom $a_3 = 0$ kommer även alla följande termer vara noll, vi får alltså en sluten form för lösningen

$$y_1(x) = \frac{a_0}{x^2}\left(1 + 2x + \frac{1}{2}x^2\right).$$

Lösning till problem 5. **a)** Vi börjar med att bestämma egenvärdena till matrisen A. Vi har

$$\det(A-\lambda I) = (1-\lambda)^2 - (1-a) = \lambda^2 - 2\lambda + a,$$

rötterna ges av

$$\lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1-a}.$$

Beroende på värdet av a får vi antigen två distinkta reella rötter, en dubbelrot eller två komplexa rötter. Formen på lösningen kommer vara olika beroende på i vilket fall vi är.

Nästa steg är att beräkna egenvektorerna, för $\lambda_1 = 1+\sqrt{1-a}$ får vi ekvationssystemet

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{1-a} & 1-a \\ 1 & -\sqrt{1-a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

En lösning ges av $x = \sqrt{1-a}$, $y = 1$, vilket ger oss egenvektorn

$$K_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{1-a} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

For $\lambda_2 = 1-\sqrt{1-a}$ får vi på liknande sätt egenvektorn

$$K_2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{1-a} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

För $a \neq 1$ ger detta oss två linjärt oberoende egenvektorer och den allmänna lösningen ges av

$$X(t) = C_1 K_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 K_2 e^{\lambda_2 t}.$$

För $a < 1$ kommer λ_1, λ_2, K_1 och K_2 alla vara reella. För $a > 1$ får vi dock komplexa värden och vi skriver därför om lösningen. Vi kan i det fallet skriva egenvärdena som $\lambda_{1,2} = 1 \pm i\sqrt{a-1}$ och egenvektorerna som

$$K_1 = \begin{pmatrix} i\sqrt{a-1} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad K_1 = \begin{pmatrix} -i\sqrt{a-1} \\ 1 \end{pmatrix},$$

vilket ger oss

$$\begin{aligned}
X(t) &= C_1 \begin{pmatrix} i\sqrt{a-1} \\ 1 \end{pmatrix} e^{(1+i\sqrt{a-1})t} + C_2 \begin{pmatrix} -i\sqrt{a-1} \\ 1 \end{pmatrix} e^{(1-i\sqrt{a-1})t} \\
&= e^t \left(C_1 \begin{pmatrix} i\sqrt{a-1} \\ 1 \end{pmatrix} (\cos(\sqrt{a-1}t) + i\sin(\sqrt{a-1}t)) + C_2 \begin{pmatrix} -i\sqrt{a-1} \\ 1 \end{pmatrix} (\cos(\sqrt{a-1}t) - i\sin(\sqrt{a-1}t)) \right) \\
&= e^t \left((C_1 + C_2) \begin{pmatrix} -\sqrt{a-1}\sin(\sqrt{a-1}t) \\ \cos(\sqrt{a-1}t) \end{pmatrix} + i(C_1 - C_2) \begin{pmatrix} \sqrt{a-1}\cos(\sqrt{a-1}t) \\ \sin(\sqrt{a-1}t) \end{pmatrix} \right).
\end{aligned}$$

Vi kan får två linjärt oberoende lösningar genom att välja först $C_1 = C_2 = \dfrac{1}{2}$ och sen $C_1 = -C_2 = \dfrac{1}{2i}$, summerar vi dem får vi den allmänna lösningen

$$\begin{aligned}
X(t) &= e^t \left(C_1 \begin{pmatrix} -\sqrt{a-1}\sin(\sqrt{a-1}t) \\ \cos(\sqrt{a-1}t) \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \sqrt{a-1}\cos(\sqrt{a-1}t) \\ \sin(\sqrt{a-1}t) \end{pmatrix} \right) \\
&= e^t \left(C_1 \begin{pmatrix} -\sqrt{a-1}\sin(\sqrt{a-1}t) \\ \cos(\sqrt{a-1}t) \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \sqrt{a-1}\cos(\sqrt{a-1}t) \\ \sin(\sqrt{a-1}t) \end{pmatrix} \right)
\end{aligned}$$

för två nya konstanter C_1 och C_2.

Det sista fallet som är kvar att hantera är $a = 1$ när vi får en dubbelrot. I det fallet har vi $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ och

$$K_1 = K_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

En lösning ges alltså av

$$X_1(t) = e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

För att hitta en andra lösning börjar vi med att kontrollera om det finns en till (linjärt oberoende) egenvektor med samma egenvärde, vi får ekvationssystemet ekvationssystemet

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Vi får direkt att $x = 0$ och det finns därför ingen annan egenvektor. Då vet vi att det istället finns en annan lösning på formen

$$X_2(t) = K_1 t e^{\lambda_1 t} + P e^{\lambda_1 t}$$

där P löser ekvationssystemet $(A - \lambda_1 I)P = K_1$, det vill säga

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

En lösning ges av $p_1 = 1$, $p_2 = 0$, vilket ger oss

$$X_2(t) = e^t t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}.$$

Sammanfattar vi räkningarna ovan har vi att för $a < 1$ ges den allmänna lösningen av

$$X(t) = C_1 e^{(1+\sqrt{1-a})t} \begin{pmatrix} \sqrt{1-a} \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{(1-\sqrt{1-a})t} \begin{pmatrix} -\sqrt{1-a} \\ 1 \end{pmatrix},$$

om $a = 1$ ges den av

$$X(t) = C_1 e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$$

och om $a > 1$ ges den av

$$X(t) = e^t \left(C_1 \begin{pmatrix} -\sqrt{a-1}\sin(\sqrt{a-1}t) \\ \cos(\sqrt{a-1}t) \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \sqrt{a-1}\cos(\sqrt{a-1}t) \\ \sin(\sqrt{a-1}t) \end{pmatrix} \right).$$

b) Vi vill skissa fastporträttet för $a = 0$. Enligt ovan ges den allmänna lösningen då av

$$X(t) = C_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Eftersom den andra termen inte beror på t kommer lösningar som börjar på linjen som bestäms av $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ stanna på denna linje. För lösningar som inte börjar på denna linje kommer den andra termen likväl vara konstant. Däremot kommer den första termen växa när $t \to \infty$. Se figur 1 för fasporträttet.

Lösning till problem 6. Vi börjar med att lösa den associerade homogena ekvationen, som ges av $X' = AX$ med

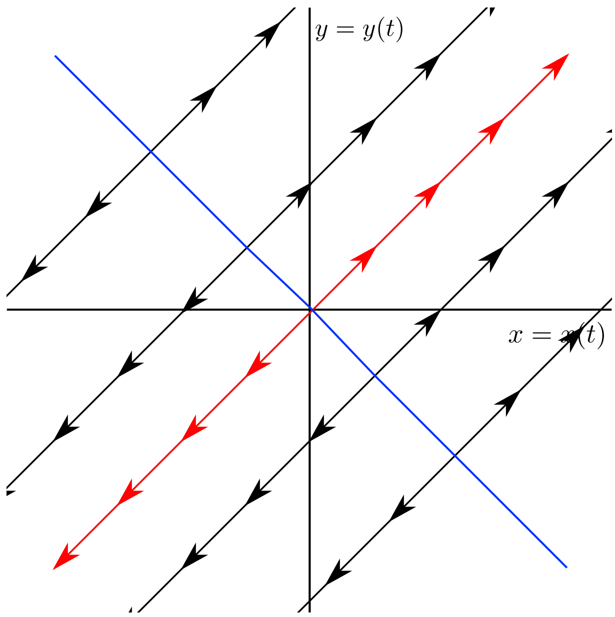
$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \quad \text{och} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Egenvärdena till A ges av rötterna till

$$\det(A - \lambda I) = -\lambda(6 - \lambda) + 8 = \lambda^2 - 6\lambda + 8,$$

vilka är $\lambda_{1,2} = 3 \pm 1$. För de respektive egenvektorerna får vi ekvationssystemen

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} K_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$



Figur 1: Fasporträtt till uppgift 5 b).

och
$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} K_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
Ett val av lösningar ges av
$$K_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad K_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
Den allmänna lösningen till det associerade homogena systemet är alltså
$$X_h(x) = C_1 e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Nästa steg är att hitta en partikulärlösning. Den inhomogena delen är inte på någon enkel form så vi använder variation av parametermetoden. För det behöver vi fundamentalmatrisen, vilken i detta fall ges av
$$\Phi = \begin{pmatrix} e^{4t} & e^{2t} \\ 2e^{4t} & e^{2t} \end{pmatrix}.$$
Enligt variation av parametermetoden ges en partikulärlösning då av
$$X_p = \Phi(t) \int \Phi^{-1}(t) F(t)\, dt.$$
där $F(t)$ är den inhomogena delen av ekvationen. Vi har det $\Phi = e^{4t}e^{2t} - 2e^{4t}e^{2t} = -e^{6t}$, så
$$\Phi^{-1}(t) = \frac{1}{\det \Phi} \begin{pmatrix} e^{2t} & -e^{2t} \\ -2e^{4t} & e^{4t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{-4t} & e^{-4t} \\ 2e^{-2t} & -e^{-2t} \end{pmatrix}.$$
Det ger oss
$$X_p = \Phi \int \begin{pmatrix} -e^{-4t} & e^{-4t} \\ 2e^{-2t} & -e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{e^{4t}}{1+t^2} \\ \dfrac{2e^{4t}}{1+t^2} \end{pmatrix} dt = \Phi \int \begin{pmatrix} \dfrac{1}{1+t^2} \\ 0 \end{pmatrix} dt = \Phi \begin{pmatrix} \tan^{-1}(t) \\ 0 \end{pmatrix},$$
där vi har skippat integrationskonstanterna eftersom vi endast söker en lösning. Vi får slutligen
$$X_p = \tan^{-1}(t) e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Så den allmänna lösningen ges av

$$X = X_h + X_p = C_1 e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \tan^{-1}(t) e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Lösning till problem 7. **a)** För att skriva ekvationen som ett system introducerar vi variablerna $x = u$ och $y = u'$. Det ger oss $x' = u' = y$ och $y' = u'' = -f(u)u' - g(u) = -f(x)y - g(x)$, vi får alltså systemet

$$\begin{cases} x' &= y \\ y' &= -f(x)y - g(x) \end{cases}.$$

b) De kritiska punkterna ges av $x' = y' = 0$. För att hitta de kritiska punkterna börjar vi med att noterade att $x' = y$ direkt ger oss $y = 0$. För den andra ekvationen behöver vi ha $-f(x)y - g(x) = 0$, men $y = 0$ reducerar detta till $g(x) = 0$. Alla kritiska punkter är alltså på formen $(x_0, 0)$ där x_0 är ett nollställe till $g(x)$.

c) Om f och g är två gånger kontinuerligt deriverbara ges linjäriseringen av systemet vid en kritisk punkt (x_0, y_0) av Jakobianen vid punkten. Jakobianen ges av

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -f'(x)y - g'(x) & -f(x) \end{pmatrix}.$$

Vid en kritisk punkt (x_0, y_0) får vi

$$J(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -f'(x_0)y_0 - g'(x_0) & -f(x_0) \end{pmatrix}.$$

I uppgiften ovan kom vi fram till att alla kritiska punkter har $y_0 = 0$, i detta fall får vi

$$J(x_0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -g'(x_0) & -f(x_0) \end{pmatrix}.$$

Vi får information om stabiliteten hos systemet genom att studera egenvärdena hos Jakobianen. Vi har

$$\det(J - \lambda I) = \lambda^2 + f(x_0)\lambda + g(x_0).$$

Egenvärdena är alltså rötterna till detta polynom. Från föreläsningarna vet vi att egenvärdena bestämmer stabiliteten hos den kritiska punkten när realdelen av egenvärdena är nollskild. Vi måste alltså utesluta att realdelen är noll.

Om rötterna är rent imaginära får vi ingen information, men det behövde vi inte heller visa. Det enda kvarvarande problematiska fallet är om $\lambda = 0$ är en rot, men om $g(x_0) \neq 0$ är detta inte fallet.

Lösning till problem 8. **a)** Den första ekvationen ger oss $x(y - x^2) = 0$, vilket betyder att $x = 0$ eller $y = x^2$. Sätter vi in $x = 0$ i den andra ekvationen får vi direkt att $y = 0$, en kritisk punkt ges alltså av $(0, 0)$. Sätter vi in $y = x^2$ får vi istället ekvationen

$$-y^3 - 3y^2 = 0 \iff y^2(y + 3) = 0,$$

som har två lösningar, $y = 0$ och $y = -3$. Tar vi $y = 0$ får vi tillbaka punkten $(0, 0)$ som vi redan har hittat. Tar vi $y = -3$ måste vi ta x så att $-3 = x^2$, men denna ekvation har inga reella lösningar. Vi drar slutatsen att det bara finns en kritisk punkt, $(0, 0)$.

b) Till att börja med söker vi a, b och k, l så att $\dfrac{dV}{dt}$ har ett definitivt tecken. Vi får att

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{dy}{dt} \\ &= kax^{k-1}(xy - x^3) + lby^{l-1}(-y^3 - 3x^4) \\ &= kax^k y - kax^{k+2} - lby^{l+2} - 3lbx^4 y^{l-1}. \end{aligned}$$

Termerna $-kax^{k+2}$ och $-3ly^{l+2}$ har båda ett definitivt tecken (beroende på tecknet på a och b). De andra två termerna har varierande tecken så vi försöker få dem att ta ut varandra. För det behöver vi

$$kax^k y - 3lbx^4y^{l-1} = 0 \iff kax^k y = 3lbx^4y^{l-1},$$

for alla x, y. Det håller om $k = 4$ och $l = 2$ samt $ka = 3lb \iff 4a = 6b$. Vi kan exempelvis ta $a = 3$ och $b = 2$, vilket ger oss

$$\frac{dV}{dt} = -12x^6 - 4y^4,$$

som är negativt definit.

Dessa val av a, b och k, l ger $V = 3x^4 + 2y^2$, som är positivt definit. Eftersom $\frac{dV}{dt}$ är negativt definit följer det då att punkten $(0, 0)$ är asymptotiskt stabil.