

Tillåtna hjälpmedel: skrivdon. Varje problem ger maximalt 5 poäng. För betygen 3, 4 och 5 krävs 18, 25 och 32 poäng. Lösningarna måste återföljas av förklarande text.

1. a) Bestäm den allmänna lösningen till

$$(9x^2 + 2y - 2) - (4y - 2x)y' = 0.$$

- b) Betrakta initialvärdesproblemet

$$y' = \frac{1}{x} + (y + 1)^{\frac{1}{3}}, \quad y(x_0) = y_0.$$

För vilka $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ garanterar existens- och unikhetsatsen att det finns en unik lösning på ett intervall $(x_0 - h, x_0 + h)$ för något $h > 0$?

(5 poäng)

2. Bestäm lösningen till initialvärdesproblemet

$$x^2 y'' + \frac{5}{2} x y' - y = 14x^2, \quad y(1) = 11, \quad y'(1) = 0.$$

med $x > 0$.

(5 poäng)

3. Ge exempel på en andra ordningens linjär differentialekvation med konstanta koefficienter som har

$$y_1(x) = (1 + x + x^2)e^{2x} \text{ och } y_2(x) = (2 + 2x + x^2)e^{2x}$$

som lösningar.

(5 poäng)

4. Betrakta ODE:n

$$x^2 y'' + (x^2 + 2x)y' + (x - 2)y = 0$$

- a) Visa att ekvationen har en reguljär singular punkt vid $x = 0$.
b) Bestäm indikalekvationen och dess rötter.
c) Bestäm en serielösning för den större av de två rötterna till indikalekvationen, för $x > 0$. Det räcker att ge de tre första termerna och differensekvationen för koefficienterna. *Ledning: Om första koefficienten är a_0 ges fjärde koefficienten av $a_3 = -\frac{1}{30}a_0$.*
d) Vad säger Frobenius sats om formen för serielösningen för den mindre av de två rötterna? Du behöver endast ge formen, du behöver **inte** räkna ut koefficienterna.

(5 poäng)

5. Låt

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \text{ och } A = \begin{pmatrix} a & 2 \\ 3 & a \end{pmatrix}.$$

- a) Bestäm den allmänna lösningen till $X' = AX$ för alla värden på parametern $a \in \mathbb{R}$.

- b) För vilka värden på a är origo den enda kritiska punkten?
c) Låt $a = 1$, skissa fasporträttet och klassificera den kritiska punkten $(0, 0)$ i detta fall..

(5 poäng)

6. Bestäm den allmänna lösningen till systemet

$$\begin{cases} x' &= -x + 2y + \frac{e^{2t}}{1+e^t} \\ y' &= 2x - y + \frac{e^{2t}}{1+e^t} \end{cases}.$$

(5 poäng)

7. Betrakta systemet

$$\begin{cases} x' &= \sin(y) \\ y' &= x + y \end{cases}.$$

- a) Hitta alla kritiska punkter för systemet.
b) Klassificera alla kritiska punkter för systemet.
c) Kan det finnas periodiska lösningar $(x(t), y(t))$ som uppfyller att $x(t) > 0$ och $y(t) > 0$ för alla t .

(5 poäng)

8. Betrakta systemet

$$\begin{cases} x' &= y^2 - x \\ y' &= -xy - y^5 \end{cases}.$$

- a) Bestäm alla kritiska punkter till systemet och visa att de är isolerade.
b) Bestäm stabiliteten hos origo. *Ledning: Sök efter en lämplig Lyapunovfunktion på formen $V(x, y) = ax^k + by^l$.*

(5 poäng)