

Tillåtna hjälpmedel: skrivdon. Varje problem ger maximalt 5 poäng. För betygen 3, 4 och 5 krävs 18, 25 och 32 poäng. Lösningarna måste återföljas av förklarande text.

1. a) Bestäm den allmänna lösningen till

$$(9x^2 + 2y - 2) - (4y - 2x)y' = 0.$$

- b) Betrakta initialvärdesproblemet

$$y' = \frac{1}{x} + (y + 1)^{\frac{1}{3}}, \quad y(x_0) = y_0.$$

För vilka $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ garanterar existens- och unikhetsatsen att det finns en unik lösning på ett intervall $(x_0 - h, x_0 + h)$ för något $h > 0$?

(5 poäng)

2. Bestäm lösningen till initialvärdesproblemet

$$x^2 y'' + \frac{5}{2} x y' - y = 14x^2, \quad y(1) = 11, \quad y'(1) = 0.$$

med $x > 0$.

(5 poäng)

3. Ge exempel på en andra ordningens linjär differentialekvation med konstanta koefficienter som har

$$y_1(x) = (1 + x + x^2)e^{2x} \text{ och } y_2(x) = (2 + 2x + x^2)e^{2x}$$

som lösningar.

(5 poäng)

4. Betrakta ODE:n

$$x^2 y'' + (x^2 + 2x)y' + (x - 2)y = 0$$

- a) Visa att ekvationen har en reguljär singular punkt vid $x = 0$.
b) Bestäm indikalekvationen och dess rötter.
c) Bestäm en serielösning för den större av de två rötterna till indikalekvationen, för $x > 0$. Det räcker att ge de tre första termerna och differensekvationen för koefficienterna. *Ledning: Om första koefficienten är a_0 ges fjärde koefficienten av $a_3 = -\frac{1}{30}a_0$.*
d) Vad säger Frobenius sats om formen för serielösningen för den mindre av de två rötterna? Du behöver endast ge formen, du behöver **inte** räkna ut koefficienterna.

(5 poäng)

5. Låt

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \text{ och } A = \begin{pmatrix} a & 2 \\ 3 & a \end{pmatrix}.$$

- a) Bestäm den allmänna lösningen till $X' = AX$ för alla värden på parametern $a \in \mathbb{R}$.

- b) För vilka värden på a är origo den enda kritiska punkten?
c) Låt $a = 1$, skissa fasporträttet och klassificera den kritiska punkten $(0, 0)$ i detta fall..

(5 poäng)

6. Bestäm den allmänna lösningen till systemet

$$\begin{cases} x' &= -x + 2y + \frac{e^{2t}}{1+e^t} \\ y' &= 2x - y + \frac{e^{2t}}{1+e^t} \end{cases}.$$

(5 poäng)

7. Betrakta systemet

$$\begin{cases} x' &= \sin(y) \\ y' &= x + y \end{cases}.$$

- a) Hitta alla kritiska punkter för systemet.
b) Klassificera alla kritiska punkter för systemet.
c) Kan det finnas periodiska lösningar $(x(t), y(t))$ som uppfyller att $x(t) > 0$ och $y(t) > 0$ för alla t .

(5 poäng)

8. Betrakta systemet

$$\begin{cases} x' &= y^2 - x \\ y' &= -xy - y^5 \end{cases}.$$

- a) Bestäm alla kritiska punkter till systemet och visa att de är isolerade.
b) Bestäm stabiliteten hos origo. *Ledning: Sök efter en lämplig Lyapunovfunktion på formen $V(x, y) = ax^k + by^l$.*

(5 poäng)

Lösningar till tentan in 1MA032 Ordinära differentialekvationer I 2023–05–30

Lösning till problem 1. a) Ekvationen står på formen för exakta ekvationer så vi provar om den är exakt. Om vi låter $M(x, y) = 9x^2 + 2y - 2$ och $N(x, y) = -4y + 2x$ har vi $M_y = 2 = N_x$, så ekvationen är mycket riktigt exakt.

Vi söker då $F(x, y)$ så att $F_x = M$ och $F_y = N$. Från det första kravet får vi

$$F(x, y) = \int 9x^2 + 2y - 2 \, dx = 3x^3 + 2xy - 2x + h(y)$$

där $h(y)$ är någon funktion som inte beror på x . Vi får

$$F_y(x, y) = 2x + h'(y)$$

vilket tillsammans med $F_y = N$ ger oss $h'(y) = -4y$ och därmed kan vi ta $h(y) = -2y^2$. Vi får alltså

$$F(x, y) = 3x^3 + 2xy - 2x - 2y^2.$$

Lösningen till ekvationen ges då implicit av

$$3x^3 + 2xy - 2x - 2y^2 = C$$

för $C \in \mathbb{R}$. Eftersom detta är ett andragradspolynom i y kan vi även lösa för y , vilket ger oss

$$y = \frac{x}{2} \pm \sqrt{\frac{x^2}{4} + \frac{3}{2}x^3 - x - \frac{C}{2}}.$$

b) Låt $f(x, y) = \frac{1}{x} + (y + 1)^{\frac{1}{3}}$. Existens- och unikhetsatsen säger att om f och $\frac{\partial f}{\partial y}$ är kontinuerliga i någon rektangel runt punkten (x_0, y_0) då finns det en unik lösning som är definierad på intervallet $(x_0 - h, x_0 + h)$ för något $h > 0$.

Vi har att $f(x, y)$ är kontinuerlig så länge $x \neq 0$. Vidare har vi

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{(y + 1)^{-\frac{2}{3}}}{3}.$$

För att denna funktion ska vara kontinuerlig måste vi ha $y + 1 \neq 0$, det vill säga $y \neq -1$. Kriteriet för satsen är alltså uppfyllt när $x \neq 0$ och $y \neq -1$.

Existens- och unikhetsatsen garanterar alltså att det finns en unik lösning för all (x_0, y_0) där $x_0 \neq 0$ och $y_0 \neq -1$.

Lösning till problem 2. Vi börjar med att hitta två linjärt oberoende lösningar till den associerade homogena ekvationen

$$x^2 y'' + \frac{5}{2} x y' - y = 0.$$

Vi känner igen detta som en Eulerekvation med $\alpha = \frac{5}{2}$ och $\beta = -1$. Vi vet då att två linjärt oberoende lösningar ges av

$$y_1(x) = C_1 |x|^{r_1} \text{ och } y_2(x) = C_2 |x|^{r_2}$$

där r_1 och r_2 är rötter till indikalekvationen

$$r^2 + \left(\frac{5}{2} - 1\right)r - 1 = 0$$

Vi får att rötterna blir $r_1 = \frac{1}{2}$ och $r_2 = -2$, vilket ger oss

$$y_1(x) = |x|^{\frac{1}{2}} \text{ och } y_2(x) = |x|^{-2}.$$

Eftersom $x > 0$ kan vi ta bort absolutbeloppen, vilket ger

$$y_1(x) = x^{\frac{1}{2}} \text{ och } y_2(x) = x^{-2}$$

Nästa steg är att hitta en partikulärlösning. Vi använder oss av variation av parametermetoden. För att använda denna metod måste vi börja med att normalisera ekvationen genom att dela med x^2 , detta ger oss

$$y'' + \frac{5}{2}x^{-1}y' - x^{-2}y = 14.$$

Vi har då

$$y_p = u_1y_1 + u_2y_2$$

där

$$u'_1 = \frac{W_1}{W} \text{ och } u'_2 = \frac{W_2}{W}$$

med

$$W = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y'_1(x) & y'_2(x) \end{vmatrix}, \quad W_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2(x) \\ f(x) & y'_2(x) \end{vmatrix}, \quad W_2 = \begin{vmatrix} y_1(x) & 0 \\ y'_1(x) & f(x) \end{vmatrix}.$$

Här är $f(x) = 14$ högerledet i den normaliserade ekvationen. Vi får

$$W = \begin{vmatrix} x^{\frac{1}{2}} & x^{-2} \\ \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{2} & -2x^{-3} \end{vmatrix} = -2x^{-\frac{5}{2}} - \frac{1}{2}x^{-\frac{5}{2}} = -\frac{5}{2}x^{-\frac{5}{2}},$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & x^{-2} \\ 14 & -2x^{-3} \end{vmatrix} = -14x^{-2},$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} x^{\frac{1}{2}} & \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{2} \\ 0 & 14 \end{vmatrix} = 14x^{\frac{1}{2}}.$$

Detta ger oss

$$u'_1 = \frac{W_1}{W} = \frac{-14x^{-2}}{-\frac{5}{2}x^{-\frac{5}{2}}} = \frac{28}{5}x^{\frac{1}{2}}$$

och

$$u'_2 = \frac{W_2}{W} = \frac{14x^{\frac{1}{2}}}{-\frac{5}{2}x^{-\frac{5}{2}}} = -\frac{28}{5}x^3$$

Integrerar vi får vi

$$u_1 = \frac{56}{15}x^{\frac{3}{2}} \text{ och } u_2 = -\frac{7}{5}x^4.$$

Vilket ger oss

$$y_p = \frac{56}{15}x^{\frac{3}{2}}x^{\frac{1}{2}} - \frac{7}{5}x^4x^{-2} = \left(\frac{56}{15} - \frac{7}{5}\right)x^2 = \frac{7}{3}x^2$$

Den allmänna lösningen ges alltså av

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + y_p = C_1x^{\frac{1}{2}} + C_2x^{-2} + \frac{7}{3}x^2.$$

Lösning till problem 3. Vi letar efter en ekvation på formen

$$y'' + py' + qy = f(x).$$

Från teorin om andra ordningens linjära ekvationer vet vi att den allmänna lösningen går att skriva på formen $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$ där $y_h = C_1y_{h,1} + C_2y_{h,2}$ är den allmänna lösningen till den associerade homogena ekvationen och y_p är en partikulärlösning. Genom att skriva y_1 och y_2 som

$$y_1(x) = e^{2x} + xe^{2x} + x^2e^{2x} \text{ och } y_2(x) = 2e^{2x} + 2xe^{2x} + x^2e^{2x}$$

ser vi att de är på formen för $y(x)$ om vi har $y_{h,1}(x) = e^{2x}$, $y_{h,2}(x) = xe^{2x}$ och $y_p(x) = x^2e^{2x}$.

Vi börjar med att bestämma p och q så att $y_{h,1}(x) = e^{2x}$ och $y_{h,2}(x) = xe^{2x}$ är lösningen till den associerade homogena ekvationen. Från teorin för andra ordningens linjära ekvationer med konstanta koefficienter vet vi att e^{2x} och xe^{2x} är lösningar om $r = 2$ är en dubbelrot till den karakteristiska ekvationen

$$r^2 + pr + q = 0.$$

Vi har $(r - 2)^2 = r^2 - 4r + 4$, så vi får $p = -4$ och $q = 4$. Vi har alltså att $y_h = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x}$ är den allmänna lösningen till ekvationen

$$y'' - 4y' + 4y = 0.$$

Sista steget är att välja $f(x)$ så att $y_p(x) = x^2e^{2x}$ är en partikulärlösning. Detta kan göras genom att stoppa in x^2e^{2x} i vänsterledet och se vad vi måste välja $f(x)$ till på det sättet. Till att börja med har vi

$$y'(x) = 2xe^{2x} + 2x^2e^{2x}$$

och

$$y''(x) = 2e^{2x} + 8xe^{2x} + 4x^2e^{2x}.$$

Insättning i $y'' - 4y' + 4y$ ger oss

$$2e^{2x} + 8xe^{2x} + 4x^2e^{2x} - 4(2xe^{2x} + 2x^2e^{2x}) + 4x^2e^{2x} = 2e^{2x}.$$

Tar vi $f(x) = 2e^{2x}$ får vi alltså att x^2e^{2x} är en partikulärlösning till

$$y'' - 4y' + 4y = 2e^{2x}.$$

Lösning till problem 4. a) För att visa att $x = 0$ är en reguljär singular punkt börjar vi med att notera att ekvationen kan skrivas som

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

med

$$p(x) = \frac{x^2 + 2x}{x^2} = 1 + \frac{2}{x} \quad \text{och} \quad q(x) = \frac{x - 2}{x^2} = \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}$$

Både $p(x)$ och $q(x)$ tydligen singulara vid $x = 0$, så $x = 0$ är en singular punkt. För att se att de är reguljär kontrollerar vi att

$$xp(x) = x + 2 \quad \text{och} \quad x^2q(x) = x - 2$$

båda är analytiska, vilket tydligen är fallet.

b) Indikalekvationen ges av $r^2 + (p_0 - 1)r + q_0 = 0$ där p_0 är värdet på $xp(x)$ vid $x = 0$ och q_0 är värdet på $x^2q(x)$ vid $x = 0$. Vi får

$$p_0 = 0 + 2 = 2 \quad \text{och} \quad q_0 = 0 - 2 = -2.$$

Vilket ger oss indikalekvationen

$$r^2 + r + -2 = 0$$

med rötterna

$$r_1 = 1 \quad \text{och} \quad r_2 = -2.$$

c) Enligt Frobenius metod söker vi en serielösning på formen

$$y = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

där r är den större av de två rötterna till indikalekvationen.

Vi har

$$\begin{aligned} y &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}, \\ y' &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n-1+r}, \\ y'' &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n-1+r) a_n x^{n-2+r}. \end{aligned}$$

Sätter vi in detta i ekvationen får vi

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n-1+r)a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)a_n x^{n+r+1} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)a_n x^{n+r} \\ + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r+1} - 2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0. \end{aligned}$$

Division med x^r och justering av index ger oss

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n-1+r)a_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} (n+r-1)a_{n-1} x^n + 2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)a_n x^n \\ + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n - 2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0. \end{aligned}$$

Om vi tar ut termerna för $n=0$ och sätter resterande termer i en summa får vi

$$(r^2 + r - 2)a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} ((n+r)^2 + (n+r) - 2)a_n + (n+r)a_{n-1} x^n = 0$$

När r är en rot till indikalekvationen blir den första termen noll, för att summan ska bli noll måste vi (enligt identitetsprincipen) ha

$$((n+r)^2 + (n+r) - 2)a_n + (n+r)a_{n-1} = 0 \iff a_n = -\frac{n+r}{(n+r)^2 + (n+r) - 2} a_{n-1}$$

för $n = 1, 2, \dots$

Sätter vi in $r_1 = 1$ får vi

$$a_n = -\frac{n+1}{(n+1)^2 + (n+1) - 2} a_{n-1}.$$

Den första termen är a_0 , de två nästkommande termerna är

$$\begin{aligned} a_1 &= -\frac{1+1}{(1+1)^2 + (1+1) - 2} a_0 = -\frac{1}{2} a_0, \\ a_2 &= -\frac{2+1}{(2+1)^2 + (2+1) - 2} a_1 = -\frac{3}{10} \frac{1}{2} a_0 = \frac{3}{20} a_0. \end{aligned}$$

Vi kan även kontrollera att

$$a_3 = -\frac{3+1}{(3+1)^2 + (3+1) - 2} a_2 = -\frac{2}{9} \frac{3}{20} a_0 = -\frac{1}{30} a_0.$$

- d) Eftersom $r_1 = 1$ och $r_2 = -2$ har vi att $r_1 = r_2 + 3$, det vill säga de skiljer sig åt med ett heltal. Frobenius sats säger då att y_2 kan skrivas på formen

$$y_2(x) = ay_1 \log x + x^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

där a är någon konstant, som även kan vara noll.

Lösning till problem 5. a) Vi börjar med att bestämma egenvärden till matrisen A . Vi har

$$\det(A - \lambda I) = (a - \lambda)(a - \lambda) - 6 = \lambda^2 - 2a\lambda + a^2 - 6,$$

rötterna ges av

$$\lambda_{1,2} = a \pm \sqrt{6}$$

Nästa steg är att beräkna egenvektorerna. För $\lambda_1 = a - \sqrt{6}$ får vi ekvationssystemet

$$\begin{pmatrix} \sqrt{6} & 2 \\ 3 & \sqrt{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

En lösning ges av $x = -\sqrt{6}$, $y = 3$, vilket ger oss egenvektorn

$$K_1 = \begin{pmatrix} -\sqrt{6} \\ 3 \end{pmatrix}.$$

För $\lambda_2 = a + \sqrt{6}$ får vi på liknande sätt egenvektorn

$$K_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{6} \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Eftersom vi har två distinkta reella egenvärden ges den allmänna lösningen av

$$X(t) = C_1 K_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 K_2 e^{\lambda_2 t}.$$

- b) De kritiska punkterna ges av lösningarna till systemet $AX = 0$. Origo är alltid en lösning till detta system. För att vi ska ha några andra lösningar måste $\det(A) = 0$, vilket är ekvivalent med att 0 är ett egenvärde. Eftersom egenvärdena av A ges av $a \pm \sqrt{6}$ har vi att 0 är ett egenvärde för $a = \pm\sqrt{6}$. För $a \neq \pm\sqrt{6}$ är origo alltså den enda kritiska punkten. För $a = \pm\sqrt{6}$ är $AX = 0$ oändligt många lösningar, och origo är därför inte den enda kritiska punkten i detta läge.
- c) För $a = 1$ har vi egenvärdena $\lambda_1 = 1 - \sqrt{6}$ och $\lambda_2 = 1 + \sqrt{6}$. Vi har $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ och vi får därmed en sadelpunkt.

Lösning till problem 6. Vi börjar med att notera att systemet går att skriva på formen $X' = AX + F(t)$ med

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \text{ och } F(t) = \begin{pmatrix} \frac{e^{2t}}{1+e^t} \\ \frac{e^{2t}}{1+e^t} \end{pmatrix}.$$

För att hitta den allmänna lösningen är första steget att lösa den associerade homogena ekvationen $X' = AX$. Vi måste då bestämma egenvärdena och egenvektorerna till A . För egenvärdena har vi

$$\det(A - \lambda I) = (-1 - \lambda)(-1 - \lambda) - 4 = \lambda^2 + 2\lambda - 3,$$

vilket ger oss egenvärdena

$$\lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{4} = -1 \pm 2.$$

Nästa steg är att bestämma de tillhörande egenvektorerna. För $\lambda_1 = -3$ får vi ekvationssystemet

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

där vi ser att en lösning ges av

$$K_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

För $\lambda_2 = 1$ får vi istället systemet

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

där en lösning är

$$K_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vi får de två lösningarna

$$X_1 = e^{-3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad X_2 = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

och den allmänna lösningen till den associerade homogena ekvationen ges av

$$X_h = C_1 e^{-3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Nästa steg är att hitta en partikulärlösning, för detta använder vi oss av variation av parametermetoden. Vi låter

$$\Phi = (X_1 \quad X_2) = \begin{pmatrix} e^{-3t} & e^t \\ -e^{-3t} & e^t \end{pmatrix}.$$

En partikulärlösning ges då av

$$X_p(t) = \Phi(t) \int \Phi^{-1}(t)F(t) dt.$$

Vi börjar med att beräkna Φ^{-1} , enligt känd formel har vi

$$\Phi^{-1} = \frac{1}{e^{-3t}e^t + e^{-3t}e^t} \begin{pmatrix} e^t & -e^t \\ e^{-3t} & e^{-3t} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{3t} & -e^{3t} \\ e^{-t} & e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Detta ger oss

$$\int \Phi^{-1}(t)F(t) dt = \frac{1}{2} \int \begin{pmatrix} e^{3t} & -e^{3t} \\ e^{-t} & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{e^{2t}}{1+e^t} \\ \frac{e^{2t}}{1+e^t} \end{pmatrix} dt = \int \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{e^t}{1+e^t} \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} 0 \\ \log(1+e^t) \end{pmatrix}.$$

Multiplikation med Φ ger oss

$$X_p = \begin{pmatrix} e^{-3t} & e^t \\ -e^{-3t} & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \log(1+e^t) \end{pmatrix} = e^t \log(1+e^t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Den allmänna lösningen ges då av

$$X = C_1 X_1 + C_2 X_2 + X_p = C_1 e^{-3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + e^t \log(1+e^t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Lösning till problem 7. a) De kritiska punkterna ges av

$$\begin{cases} 0 = \sin(y) \\ 0 = x + y \end{cases}.$$

Den första ekvationen ger oss $y = n\pi$ för $n \in \mathbb{Z}$ och den andra ekvationen ger oss då $x = -y = -n\pi$. De kritiska punkterna ges alltså av $(-n\pi, n\pi)$ för $n \in \mathbb{Z}$.

b) För att klassificera de kritiska punkterna studerar vi Jakobianen, som ges av

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & \cos(y) \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

För de kritiska punkterna får vi

$$J(-n\pi, n\pi) = \begin{pmatrix} 0 & \cos(n\pi) \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & (-1)^n \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

För att få egenvärdena beräkningar vi

$$\det(J(-n\pi, n\pi) - \lambda I) = \lambda^2 - \lambda - (-1)^n,$$

vilket ger oss egenvärden

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + (-1)^n}.$$

Vi ser att värdet beror på huruvida n är jämnt eller udda.

För jämna n får vi

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Det ger oss ett positivt och ett negativt egenvärde, vilket motsvarar en sadelpunkt. För jämna n är alltså de kritiska punkterna sadelpunkter och är då instabila.

För udda n får vi

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{-\frac{3}{4}}.$$

Det ger oss komplexa egenvärden med en positiv realdel, vilket motsvarar en instabil spiraler. För udda n är alltså de kritiska punkterna instabila spiraler.

- c) Enligt en sats från kursen vet vi att en periodisk lösning måste omsluta minst en kritisk punkt. De kritiska punkterna ges i detta fall ges av $(-n\pi, n\pi)$ med $n \in \mathbb{Z}$. Vi noterar att x och y värden alltid har olika tecken (förutom fallet $n = 0$), det finns alltså ingen kritisk punkt (x_0, y_0) som uppfyller att $x_0 > 0$ och $y_0 > 0$. Det följer att det inte kan finnas några periodiska lösningar som uppfyller $x(t) > 0$ och $y(t) > 0$ för alla t .

Lösning till problem 8. a) De kritiska punkterna ges av

$$\begin{cases} 0 &= y^2 - x \\ 0 &= -xy - y^5 \end{cases}.$$

Den första ekvationen ger oss $y^2 = x$. Sätter vi in detta i den andra ekvationen får vi $-y^3 - y^5 = 0$. Skriver vi om detta som $y^3(1 + y^2) = 0$ ser vi att den enda lösningen är $y = 0$, vilket direkt ger $x = 0$. Den enda kritiska punkten är således $(0, 0)$, och eftersom det inte finns några andra kritiska punkter måste den vara isolerad.

- b) Vi ansätter $V(x, y) = ax^k + by^l$ som Liapunovfunktion. Vi börjar med att beräkna derivatan av V med avseende på systemet, vi får

$$\frac{dV}{dt} = kax^{k-1}(y^2 - x) + lby^{l-1}(-xy - y^5) = kax^{k-1}y^2 - kax^k - lby^l - lby^{l+4}.$$

Eftersom målet är att $\frac{dV}{dt}$ ska vara antingen positivt eller negativt definit vill vi bli av med termen $-lby^l$ var tecken beror på x . Vi ser att vi med rätt val av koefficienter kan få den att tas ut av termen $kax^{k-1}y^2$. Vi vill alltså ha $lby^l = kax^{k-1}y^2$, vilket ger $k = l = 2$ och $a = b$. Sätter vi in detta får vi

$$\frac{dV}{dt} = 2axy^2 - 2ax^2 - 2axy^2 - 2ay^6 = -2ax^2 - 2ay^6 = -2a(x^2 + y^6).$$

Eftersom $x^2 + y^6$ alltid är positivt utanför origo ges tecknet av $-2a$.

Från Liapunovs sats vet vi att om V är positivt definit och $\frac{dV}{dt}$ är negativt definit så har vi en asymptotiskt stabil kritisk punkt. Om vi tar $a = b = 1$ får vi

$$V(x, y) = x^2 + y^2$$

och

$$\frac{dV}{dt} = -2x^2 - 2y^6.$$

Vi ser att V är positivt definit och $\frac{dV}{dt}$ är negativt definit. Det följer att origo är en asymptotiskt stabil kritisk punkt.