

Tillåtna hjälpmedel: skrivdon. Varje problem ger maximalt 5 poäng. För betygen 3, 4 och 5 krävs 18, 25 och 32 poäng. Lösningarna måste återföljas av förklarande text.

1. a) Bestäm lösningen till begynnelsevärdesproblemet

$$y - 2x \sin(2x) + xy' = 0, \quad y(\pi) = 1.$$

- b) Ge exempel på en separabel ODE där den allmänna lösningen ges av

$$y(x) = \log(\sin(x) + x + C),$$

för en konstant  $C$ . Ge en kort förklaring till varför ODE:n är separabel.

(5 poäng)

2. Bestäm lösningen till initialvärdesproblemet

$$-xy'' + (2x + 1)y' - (x + 1)y = 0, \quad y(2) = 6e^2, \quad y'(2) = 10e^2,$$

Ledning: En lösning till den associerade homogena ekvationen ges av  $e^x$ .

(5 poäng)

3. a) Ge exempel på en andra ordningens linjär ODE med konstanta koefficienter som har

$$y_1(x) = \cos(x) + 2 \sin(x) + x \text{ och } y_2(x) = 2 \cos(x) + \sin(x) + x$$

som lösningar.

- b) Ge exempel på en andra ordningens linjär ODE på formen

$$A(x)y'' + B(x)y' + C(x)y = 0,$$

där  $A$ ,  $B$  och  $C$  är analytiska funktioner, som har en reguljär singulär punkt i  $x = 0$ , en irreguljär singulär punkt i  $x = 1$  och inga andra singulära punkter.

I båda fallen, kom ihåg att motivera varför ditt exempel uppfyller de givna villkoren.

(5 poäng)

4. Betrakta ODE:n

$$x^2 y'' + \left(x^2 - \frac{3}{2}\right) xy' + y = 0$$

- a) Visa att ekvationen har en reguljär singulär punkt vid  $x = 0$ .  
b) Bestäm indikalekvationen (indicial equation) och dess rötter.  
c) Bestäm två serielösningar för  $x > 0$ , en för varje rot till indikalekvationen. Det räcker att ge de fyra första termerna och differensekvationen för koefficienterna. *Kontroll: Om första koefficienten för den ena lösningen är  $a_0$  ges den femte koefficienten av  $a_4 = \frac{4}{77}a_0$ . Om första koefficienten för den andra lösningen är  $b_0$  ges den femte koefficienten av  $b_4 = \frac{1}{8}b_0$ .*

(5 poäng)

5. Låt

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \text{ och } A = \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ -4 & -7 \end{pmatrix}.$$

- Bestäm den allmänna lösningen till  $X' = AX$ .
- Skissa fasporträttet och ange dess typ och stabilitet.
- Bestäm en lösning som uppfyller begynnelsevillkoret  $X(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

(5 poäng)

6. Bestäm den allmänna lösningen till systemet

$$\begin{cases} x' = 2x + \frac{y}{2} + te^{2t} \\ y' = -2x + 2y \end{cases}.$$

(5 poäng)

7. Betrakta ekvationen

$$u'' - \left(4 \cos\left(\frac{\pi u}{2}\right) + 3\right) u' + u^2 - 1 = 0.$$

- Skriv om ekvationen som ett system av första ordningens ekvationer.
- Bestäm de kritiska punkterna hos systemet.
- Visa att om det existerar en gränscykel till systemet så måste den gå runt punkten  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

(5 poäng)

8. Betrakta systemet

$$\begin{cases} x' = 5x^7 + 5y^7 \\ y' = -3x^5 + y^3 \end{cases}.$$

- Bestäm alla kritiska punkter till systemet och beräkna egenvärdena hos Jakobianen vid de kritiska punkterna. Vad säger dessa egenvärden oss om stabiliteten vid de kritiska punkterna?
- Bestäm stabiliteten hos origo. *Ledning:* Sök efter en lämplig Lyapunovfunktion på formen  $V(x, y) = ax^k + by^l$ .

(5 poäng)