UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Joel Dahne

1MA032 Ordinära differentialekvationer I
MaKand, FyKand, STS, fristående
2024–05–21

Tillåtna hjälpmedel: skrivdon. Varje problem ger maximalt 5 poäng. För betygen 3, 4 och 5 krävs 18, 25 och 32 poäng. Lösningarna måste återföljas av förklarande text.

1. **a)** Bestäm lösningen till begynnelsevärdesproblemet

$$y - 2x\sin(2x) + xy' = 0, \quad y(\pi) = 1.$$

b) Ge exempel på en separabel ODE där den allmänna lösningen ges av

$$y(x) = \log(\sin(x) + x + C),$$

för en konstant C. Ge en kort förklaring till varför ODE:n är separabel.

(5 poäng)

2. Bestäm lösningen till initialvärdesproblemet

$$-xy'' + (2x+1)y' - (x+1)y = 0, \quad y(2) = 6e^2, \quad y'(2) = 10e^2,$$

Ledning: En lösning till den associerade homogena ekvationen ges av e^x.

(5 poäng)

3. **a)** Ge exempel på en andra ordningens linjär ODE med konstanta koefficienter som har

$$y_1(x) = \cos(x) + 2\sin(x) + x \text{ och } y_2(x) = 2\cos(x) + \sin(x) + x$$

som lösningar.

b) Ge exempel på en andra ordningens linjär ODE på formen

$$A(x)y'' + B(x)y' + C(x)y = 0,$$

där A, B och C är analytiska funktioner, som har en reguljär singulär punkt i $x = 0$, en irreguljär singulär punkt i $x = 1$ och inga andra singulära punkter.

I båda fallen, kom ihåg att motivera varför ditt exempel uppfyller de givna villkoren.

(5 poäng)

4. Betrakta ODE:n

$$x^2y'' + \left(x^2 - \frac{3}{2}\right)xy' + y = 0$$

a) Visa att ekvationen har en reguljär singulär punkt vid $x = 0$.

b) Bestäm indikalekvationen (indicial equation) och dess rötter.

c) Bestäm två serielösningar för $x > 0$, en för varje rot till indikalekvationen. Det räcker att ge de fyra första termerna och differensekvationen för koefficienterna. *Kontroll: Om första koefficienten för den ena lösningen är a_0 ges den femte koefficienten av $a_4 = \frac{4}{77}a_0$. Om första koefficienten för den andra lösningen är b_0 ges den femte koefficienten av $b_4 = \frac{1}{8}b_0$.*

(5 poäng)

5. Låt

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \text{ och } A = \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ -4 & -7 \end{pmatrix}.$$

a) Bestäm den allmänna lösningen till $X' = AX$.

b) Skissa fasporträttet och ange dess typ och stabilitet.

c) Bestäm en lösning som uppfyller begynnelsevillkoret $X(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

(5 poäng)

6. Bestäm den allmänna lösningen till systemet

$$\begin{cases} x' &= 2x + \dfrac{y}{2} + te^{2t} \\ y' &= -2x + 2y \end{cases}.$$

(5 poäng)

7. Betrakta ekvationen

$$u'' - \left(4\cos\left(\frac{\pi u}{2}\right) + 3\right) u' + u^2 - 1 = 0.$$

a) Skriv om ekvationen som ett system av första ordningenens ekvationer.

b) Bestäm de kritiska punkterna hos systemet.

c) Visa att om det existerar en gränscykel till systemet så måste den gå runt punkten $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(5 poäng)

8. Betrakta systemet

$$\begin{cases} x' &= 5x^7 + 5y^7 \\ y' &= -3x^5 + y^3 \end{cases}.$$

a) Bestäm alla kritiska punkter till systemet och beräkna egenvärdena hos Jakobianen vid de kritiska punkterna. Vad säger dessa egenvärden oss om stabiliteten vid de kritiska punkterna?

b) Bestäm stabiliteten hos origo. *Ledning: Sök efter en lämplig Lyapunovfunktion på formen* $V(x,y) = ax^k + by^l$.

(5 poäng)

Lösningar till tentan in 1MA032 Ordinära differentialekvationer I 2024–05–21

Lösning till problem 1. **a)** Vi ser att ekvationen är linjär, och skriver den därför på standardformen för linjära ekvationer:

$$y' + \frac{1}{x}y = 2\sin(2x).$$

Vi kan lösa den med hjälp av integrerande faktor. Den integrerande faktorn blir

$$\mu(x) = e^{\int \frac{1}{x}} = e^{\log(x)} = x.$$

Lösningen ges då av

$$\begin{aligned} y(x) = \frac{1}{\mu(x)} \int \mu(x) 2x \sin(2x)\ dx &= \frac{1}{x} \int 2x\sin(2x)\ dx \\ &= \frac{1}{x}\left(-x\cos(2x) + \frac{\sin(2x)}{2} + C\right) = -\cos(2x) + \frac{\sin(2x) + 2C}{2x}. \end{aligned}$$

Slutligen vill vi bestämma C så att begynnelsevillkoret är uppfyllt. Vi får

$$y(\pi) = -\cos(2\pi) + \frac{\sin(2\pi) + 2C}{2\pi} = -1 + \frac{C}{\pi}.$$

Tillsammans med $y(\pi) = 1$ ger detta oss

$$-1 + \frac{C}{\pi} = 1 \iff C = 2\pi.$$

Så lösningen till begynnelsevärdesproblemet är

$$y(x) == -\cos(2x) + \frac{\sin(2x) + 2\pi}{x}.$$

b) En separabel ODE är på formen

$$y' = f(x)g(y)$$

och från föreläsningarna vet vi att lösningarna fås av

$$\int \frac{1}{g(y)}\ dy = \int f(x)\ dx.$$

Om vi vill ha $y(x) = \log(\sin(x) + x + C)$ som lösning kan vi tänka oss att

$$\int \frac{1}{g(y)}\ dy = e^y + C_1$$

och

$$\int f(x)\ dx = \sin(x) + x + C_2.$$

Vi får då nämligen

$$e^y + C_1 = \sin(x) + x + C_2 \iff e^y = \sin(x) + x + (C_2 - C_1) \iff y = \log(\sin(x) + x + (C_2 - C_1)).$$

Låter vi $C = C_2 - C_1$ är alltså lösningen på den givna formen.
Från

$$\int \frac{1}{g(y)}\ dy = e^y + C_1$$

får vi genom att derivera att

$$\frac{1}{g(y)}\ dy = e^y,$$

vilket ger oss $g(y) = e^{-y}$. På samma sätt får vi från

$$\int f(x)\ dx = \sin(x) + x + C_2.$$

att

$$f(x) = \cos(x) + 1.$$

Det ger oss alltså ODE:n

$$y' = (\cos(x) + 1)e^{-y}.$$

Den är separabel eftersom den är på formen $y' = f(x)g(y)$. Lösningarna ges av

$$\int e^y\ dy = \int \cos(x) + 1\ dx,$$

vilket blir

$$e^y = \sin(x) + x + C.$$

Vi kan skriva om detta som

$$y = \log(\sin(x) + x + C),$$

vilket på den sökta formen.

Lösning till problem 2. Vi börjar med att hitta den allmänna lösningen till ekvationen. Eftersom vi är givna en lösning, $y_1 = e^x$, kan vi använda reduktion av ordning för att hitta en till linjärt oberoende lösning.

Vi gör ansatsen $y_2 = u(x)y_1(x)$. Insättning i ekvationen ger oss

$$-x(u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1'') + (2x+1)(u'y_1 + uy_1) - (x+1)uy_1 = 0.$$

Om vi samlar ihop de olika derivatorna för u får vi

$$-xy_1u'' + (-2xy_1' + (2x+1)y_1)u' + (-xy_1'' + (2x+1)y_1' - (x+1)y_1)u = 0.$$

Eftersom y_1 är en lösning till ekvationen blir den sista termen noll. Vi får då kvar

$$-xy_1u'' + (-2xy_1' + (2x+1)y_1)u' = 0.$$

Insättning av $y_1 = e^x$ och $y_1' = e^x$ ges oss

$$(-xu'' + u')e^x = 0.$$

Vi söker alltså u som uppfyller

$$-xu'' + u' = 0.$$

Om vi låter $v = u'$ får vi den första ordningens ekvationen

$$-xv' + v = 0.$$

En lösning till denna ekvation ges av $v = x$ (vi behöver enbart en lösning i detta steg). Det ger oss $u = \frac{1}{2}x^2$ (vi skippar integratonskonstanten eftersom vi enbart behöver en lösning). Således ges y_2 av $u(x)y_1(x) = \frac{1}{2}x^2e^x$. Vi kan få en enklare lösningen genom att multiplicera med 2, vilket ger oss $y_2 = x^2e^x$. Den allmänna lösningen till ekvationen är således

$$y(x) = C_1e^x + C_2x^2e^x.$$

Vi söker nu C_1 och C_2 så att begynnelsevillkoret uppfylls. Vi har

$$y'(x) = C_1e^x + C_2x^2e^x + 2C_2xe^x.$$

Vi får således ekvationesystemet

$$\begin{cases} e^2 &= C_1e^2 + C_24e^2 \\ e^2 &= C_1e^2 + C_24e^2 + 2C_22e^2 \end{cases}.$$

Förkortar vi med e^2 får vi

$$\begin{cases} 6 &= C_1 + 4C_2 \\ 10 &= C_1 + 8C_2 \end{cases}.$$

Vi får att lösningen ges av $C_1 = 2$ och $C_2 = 1$. Lösningen till ekvationen ges alltså av

$$y(x) = 2e^x + x^2 e^x$$

Lösning till problem 3. **a)** Vi letar efter en ekvation på formen

$$y'' + py' + qy = f(x).$$

Från teorin om andra ordningens linjära ekvationer vet vi att den allmänna lösningen går att skriva på formen $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$ där $y_h = C_1 y_{h,1} + C_2 y_{h,2}$ är den allmänna lösningen till den associerade homogena ekvationen och y_p är en partikulärlösning. Vi kan noterar att om $y_{h,1}(x) = \cos(x)$, $y_{h,2}(x) = \sin(x)$ och $y_p(x) = x$, där både y_1 och y_2 på formen ovan.

Vi börjar med att bestämma p och q så att $y_{h,1}(x) = \cos(x)$ och $y_{h,2}(x) = \sin(x)$ är lösningen till den associerade homogena ekvationen. Från teorin för andra ordningens linjära ekvationer med konstanta koefficienter vet vi att $\cos(x)$ och $\sin(x)$ är lösningar om $r_{1,2} = \pm i$ är lösningar till den karakteristiska ekvationen

$$r^2 + pr + q = 0.$$

Detta är fallet om $p = 0$ och $q = 1$. Vi får då att $y_h = C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x)$ är den allmänna lösningen till ekvationen

$$y'' + y = 0.$$

Sista steget är att välja $f(x)$ så att $y_p(x) = x$ är en partikulärlösning. Detta kan göras genom att stoppa in x i vänsterledet och se vad vi måste välja $f(x)$ till på det sättet. Eftersom $y_p' = 1$ och $y_p'' = 0$ ger insättning i $y'' + y$ oss

$$0 + x = x.$$

Tar vi $f(x) = x$ får vi alltså att x är en partikulärlösning till

$$y'' + y = x.$$

b) Vi vill att $x = 0$ och $x = 1$ ska vara singulära punkter. För detta behöver vi ha att $x = 0$ och $x = 1$ är nollställen till A, och det ska inte heller finnas några andra nollställen eftersom vi inte ska ha några andra singulära punkter. Låt oss börja med ansatsen $A(x) = x(x-1)$. För B och C har vi än så länge inga tydliga krav, låt oss därför börja med ansatsena $B(x) = C(x) = 1$.

Med ansatserna ovan får vi

$$p(x) = \frac{B(x)}{A(x)} = \frac{1}{x(x-1)} \text{ och } q(x) = \frac{C(x)}{A(x)} = \frac{1}{x(x-1)}.$$

Dessa är inte analytiska i $x = 0$ eller $x = 1$, men de är analytiska i alla andra punkter. Så med dessa val av A, B och C är $x = 0$ och $x = 1$ singulära punkter, och det finns inga andra singulära punkter.

Nästa steg är att se till att $x = 0$ är en reguljär singulär punkt och $x = 1$ en irreguljär singulär punkt. Vi börjar med att kontrollera $x = 0$, för att den ska vara reguljär ska $xp(x)$ och $x^2 q(x)$ vara analytiska i $x = 0$. Vi får

$$xp(x) = \frac{1}{(x-1)} \text{ och } x^2 q(x) = \frac{x}{(x-1)}.$$

Då båda dessa funktioner är analytiska i $x = 0$ så är punkten reguljär.

För punkten $x = 1$ vill vi att den ska vara irreguljär, det betyder att antingen $(x-1)p(x)$ eller $(x-1)q(x)$ ska inte vara analytisk i $x = 1$. Vi får

$$(x-1)p(x) = \frac{1}{x} \text{ och } (x-1)^2 q(x) = \frac{(x-1)}{x}.$$

Båda dessa funktioner är dock analytiska i $x = 1$, punkten är alltså **inte** irreguljär. Vi behöver alltså justera vårt val av A, B och C för att få en irreguljär punkt i $x = 1$.

Om vi ändrar A så att det istället ges av $A(x) = x(1-x)^2$ får vi, med B och C samma som innan,

$$(x-1)p(x) = (x-1)\frac{1}{x(x-1)^2} = \frac{1}{x(x-1)} \text{ och } (x-1)^2 q(x) = (x-1)^2\frac{1}{x(x-1)^2} = \frac{1}{x}.$$

I detta fall är $(x-1)p(x)$ inte längre analytisk i $x=1$, så $x=1$ är nu en irreguljär singulär punkt ($(x-1)^2 q(x)$ är dock fortfarande analytisk).

Vi har nu alltså ansatsen

$$x(x-1)^2 y'' + y' + y = 0.$$

Vi kontrollerar att den uppfyller alla våra villkor. Vi får

$$p(x) = \frac{B(x)}{A(x)} = \frac{1}{x(x-1)^2} \text{ och } q(x) = \frac{C(x)}{A(x)} = \frac{1}{x(x-1)^2}.$$

Dessa funktioner är analytiska i alla punkter utom $x=0$ och $x=1$. Vi har alltså att $x=0$ och $x=1$ är singulära punkter, och det finns inga andra singulära punkter. Vidare kontrollerar vi att $x=0$ är en reguljär punkt. Vi har

$$xp(x) = \frac{B(x)}{A(x)} = \frac{1}{x(x-1)^2} \text{ och } x^2 q(x) = \frac{C(x)}{A(x)} = \frac{1}{x(x-1)^2}.$$

Då båda dessa funktioner är analytiska i $x=0$ så är det mycket riktigt en reguljär singulär punkt. Slutligen kontrollerar vi att $x=1$ är en irreguljär punkt. Vi har

$$(x-1)p(x) = \frac{1}{x(x-1)} \text{ och } (x-1)^2 q(x) = \frac{1}{x}.$$

I detta fall är $(x-1)p(x)$ inte analytisk i $x=1$ och det är därför en irreguljär singulär punkt.

Lösning till problem 4. **a)** För att visa att $x=0$ är en reguljär singular punkt börjar vi med att notera att ekvationen kan skrivas som

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

med

$$p(x) = \frac{x^2 - \frac{3}{2}}{x} = x - \frac{3}{2x} \quad \text{and} \quad q(x) = \frac{1}{x^2}.$$

Både $p(x)$ och $q(x)$ tydligt singulära vid $x=0$, så $x=0$ är en singulär punkt. För att se att de är reguljär kontrollerar vi att

$$xp(x) = x^2 - \frac{3}{2} \quad \text{and} \quad x^2 q(x) = 1$$

båda är analytiska, vilket tydligt är fallet.

b) Indikalekvationen ges av $r^2 + (p_0 - 1)r + q_0 = 0$ där p_0 är värdet på $xp(x)$ vid $x=0$ och q_0 är värdet på $x^2 q(x)$ vid $x=0$. Vi får

$$p_0 = -\frac{3}{2} \quad \text{och} \quad q_0 = 1.$$

Vilket ger oss indikalekvationen

$$r^2 - \frac{5}{2}r + 1 = 0$$

med rötterna

$$r_1 = 2 \quad \text{and} \quad r_2 = \frac{1}{2}.$$

c) Enligt Frobenious metod söker vi serielösningar på formen

$$y = x^r \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

där r är en rot till indikalekvationen.

Vi har

$$
\begin{aligned}
y &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}, \\
y' &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) c_n x^{n-1+r}, \\
y'' &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n-1+r) c_n x^{n-2+r}.
\end{aligned}
$$

Sätter vi in detta i ekvationen får vi

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n-1+r)c_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_n x^{n+r+2} - \frac{3}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} = 0$$

Division med x^r och justering av index ger oss

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n-1+r)c_n x^{n} + \sum_{n=2}^{\infty}(n-2+r)c_{n-2} x^{n+r} - \frac{3}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_n x^{n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n} = 0$$

Om vi tar ut termerna för $n=0$ och $n=1$ samt sätter resterande termer i en summa får vi

$$\left(r(r-1) - \frac{3}{2}r + 1\right) c_0 + \left((1+r)r - \frac{3}{2}(1+r) + 1\right) c_1 \sum_{n=2}^{\infty}\left(\left((n+r)(n-1+r) - \frac{3}{2}(n+r) + 1\right) c_n + (n-2+r)c\right.$$

vilket vi kan skriva om som

$$\left(r^2 - \frac{5}{2}r + 1\right) c_0 + \left((1+r) - \frac{5}{2}(1+r) + 1\right) c_1 \sum_{n=2}^{\infty}\left(\left((n+r)^2 - \frac{5}{2}(n+r) + 1\right) c_n + (n-2+r)c_{n-2}\right) x^n = 0.$$

När r är en rot till indikalekvationen blir den första termen noll. Faktorn framför c_1 är inte noll för varken r_1 eller r_2, vi måste alltså ha $c_1 = 0$ i båda fallen. För att summan ska bli noll måste vi (enligt identitetsprincipen) ha

$$\left((n+r)^2 - \frac{5}{2}(n+r) + 1\right) c_n + (n-2+r)c_{n-2} = 0 \iff c_n = -\frac{n-2+r}{(n+r)^2 - \frac{5}{2}(n+r) + 1} c_{n-2}$$

för $n = 2, \ldots$. Eftersom $c_1 = 0$ kommer vi ha att $c_n = 0$ för alla udda n.

För $r_1 = 2$ betecknar vi koefficienterna med a_n, vi får

$$a_n = -\frac{n}{(n+2)^2 - \frac{5}{2}(n+2) + 1} a_{n-2} = -\frac{n}{n^2 + \frac{3}{2}n} a_{n-2} = -\frac{1}{n + \frac{3}{2}} a_{n-2}$$

och de fem första termerna ges av

$$
\begin{aligned}
a_0 &= a_0, \\
a_1 &= 0, \\
a_2 &= -\frac{1}{2+\frac{3}{2}} a_0 = -\frac{2}{7} a_0, \\
a_3 &= 0.
\end{aligned}
$$

Vi kan även kontrollera att

$$a_4 = -\frac{1}{4+\frac{3}{2}} a_2 = \frac{4}{77} a_0,$$

vilket stämmer överens med kontrollvärdet.

För $r_1 = \dfrac{1}{2}$ betecknar vi koefficienterna med b_n, vi får

$$b_n = -\frac{n-\frac{3}{2}}{(n+1/2)^2 - \frac{5}{2}(n+1/2) + 1} b_{n-2} = -\frac{n-\frac{3}{2}}{n^2 - \frac{3}{2}n} b_{n-2} = -\frac{n-\frac{3}{2}}{n(n-\frac{3}{2})} b_{n-2} = -\frac{1}{n} b_{n-2}$$

och de fem första termerna ges av

$$\begin{aligned}
b_0 &= b_0, \\
b_1 &= 0, \\
b_2 &= -\frac{1}{2} b_0, \\
b_3 &= 0.
\end{aligned}$$

Vi kan även kontrollera att

$$b_4 = -\frac{1}{4} b_2 = \frac{1}{8} b_0,$$

vilket stämmer överens med kontrollvärdet.

Lösning till problem 5. **a)** Vi börjar med att bestämma egenvärden till matrisen A. Vi har

$$\det(A - \lambda I) = (-5-\lambda)(-7-\lambda) - (-2)(-4) = \lambda^2 + 12\lambda + 27,$$

rötterna ges av

$$\lambda_{1,2} = -6 \pm 3.$$

Nästa steg är att beräkna egenvektorerna. För $\lambda_1 = -3$ får vi ekvationssystemet

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

En lösning ges av $x = 1$, $y = -1$, vilket ger oss egenvektorn

$$K_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

För $\lambda_2 = -9$ får vi på liknande sätt egenvektorn

$$K_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Detta ge oss den allmänna lösningen

$$X(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-3t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-9t}.$$

b) Eftersom vi har två distinkta reella egenvärden som båda är negativa ges fastporträttet av en stabil nod.

c) För att hitta en lösning till begynnelsevillkoret sätter vi in $t = 0$ i den allmänna lösningen ovan. Vi får

$$X(0) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Om vi tar $C_1 = 1$ och $C_2 = 2$ får

$$X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix},$$

vilket stämmer överens med vårt begynnelsevillkor. Lösningen är således

$$X(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-3t} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-9t}.$$

Lösning till problem 6. Vi börjar med att notera att systemet går att skriva på formen $X' = AX + F(t)$ med

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1/2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \text{ och } F(t) = \begin{pmatrix} te^{2t} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

För att hitta den allmänna lösningen är första steget att lösa den associerade homogena ekvationen $X' = AX$. Vi måste då bestämma egenvärdena och egenvektorerna till A. För egenvärdena har vi

$$\det(A - \lambda I) = (2-\lambda)(2-\lambda) + 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 5,$$

vilket ger oss egenvärdena

$$\lambda_{1,2} = 2 \pm i.$$

Nästa steg är att bestämma de tillhörande egenvektorerna. Eftersom vi har komplexa egenvärden kommer egenvektorerna vara varandras konjugat, det räcker alltså att bestämma en av egenvektorerna så får vi den andra på köpet. For $\lambda_1 = 2 + i$ får vi

$$\begin{pmatrix} -i & 1/2 \\ -2 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Vi kan se att en lösning ges av $k_1 = -i$ och $k_2 = 2$, vilket ger oss

$$K_1 = \begin{pmatrix} -i \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Den andra egenvektorn ges av konjugatet,

$$K_2 = \begin{pmatrix} i \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Utifrån detta får vi att den allmänna lösningen till det associerade homogena ekvationen är

$$X_h = C_1 e^{(2+i)t} K_1 + C_2 e^{(2-i)t} K_2.$$

För enkelhetens skulle skriver vi om lösningarna på reell form. Från föreläsningarna vet vi att real och imaginärdelen av $e^{(2+i)t}K_1$ ger två linjärt oberoende lösningar. Vi får

$$e^{(2+i)t}K_1 = e^{2t}(\cos(t) + i\sin(t)) \begin{pmatrix} -i \\ 2 \end{pmatrix} = e^{2t} \left(\begin{pmatrix} \sin(t) \\ 2\cos(t) \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} -\cos(t) \\ 2\sin(t) \end{pmatrix} \right),$$

vilket ger oss

$$X_1 = e^{2t} \begin{pmatrix} \sin(t) \\ 2\cos(t) \end{pmatrix} \text{ och } X_2 = e^{2t} \begin{pmatrix} -\cos(t) \\ 2\sin(t) \end{pmatrix}.$$

Den allmänna lösningen till den associerade homogena ekvationen kan således skrivas på formen

$$X_h = C_1 e^{2t} \begin{pmatrix} \sin(t) \\ 2\cos(t) \end{pmatrix} + C_2 e^{2t} \begin{pmatrix} -\cos(t) \\ 2\sin(t) \end{pmatrix}.$$

Nästa steg är att hitta en partikulärlösning, för detta använder vi oss av variation av parametermetoden. Vi låter

$$\Phi = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \end{pmatrix} = e^{2t} \begin{pmatrix} \sin(t) & -\cos(t) \\ 2\cos(t) & 2\sin(t) \end{pmatrix}.$$

En partikulärlösning ges då av

$$X_p(t) = \Phi(t) \int \Phi^{-1}(t) F(t)\ dt.$$

Vi börjar med att beräkna Φ^{-1}, enligt känd formel har vi

$$\Phi^{-1} = \frac{e^{-2t}}{2\sin^2(t) + 2\cos^2(t)} \begin{pmatrix} 2\sin(t) & \cos(t) \\ -2\cos(t) & \sin(t) \end{pmatrix} = e^{-2t} \begin{pmatrix} \sin(t) & \cos(t)/2 \\ -\cos(t) & \sin(t)/2 \end{pmatrix}.$$

Detta ger oss

$$\begin{aligned} \int \Phi^{-1}(t)F(t)\ dt = \int e^{-2t} \begin{pmatrix} \sin(t) & \cos(t)/2 \\ -\cos(t) & \sin(t)/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} te^{2t} \\ 0 \end{pmatrix}\ dt &= \int \begin{pmatrix} t\sin(t) \\ -t\cos(t) \end{pmatrix}\ dt \\ &= \begin{pmatrix} -t\cos(t) + \sin(t) \\ -t\sin(t) - \cos(t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Multiplikation med Φ ger oss

$$
\begin{aligned}
X_p &= e^{2t}\begin{pmatrix} \sin(t) & -\cos(t) \\ 2\cos(t) & 2\sin(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -t\cos(t)+\sin(t) \\ -t\sin(t)-\cos(t) \end{pmatrix} \\
&= e^{2t}\begin{pmatrix} -t\cos(t)\sin(t)+\sin^2(t)+t\cos(t)\sin(t)+\cos^2(t) \\ -2t\cos^2(t)+2\cos(t)\sin(t)-2t\sin^2(t)-2\cos(t)\sin(t) \end{pmatrix} = e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ -2t \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Den allmänna lösningen ges då av

$$X = C_1X_{h,1}+C_2X_{h,2}+X_p = C_1e^{2t}\begin{pmatrix} \sin(t) \\ 2\cos(t) \end{pmatrix} + C_2e^{2t}\begin{pmatrix} -\cos(t) \\ 2\sin(t) \end{pmatrix} + e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ -2t \end{pmatrix}.$$

Lösning till problem 7. **a)** För att skriva om ekvationen som ett system introducerar vi variablerna $x = u$ och $y = u'$. Det ger oss systemet

$$\begin{cases} x' &= y \\ y' &= \left(4\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)+3\right)y - x^2 + 1 \end{cases}.$$

b) De kritiska punkterna ges av $x' = 0$ och $y' = 0$. Från $x' = 0$ får vi direkt $y = 0$. Från $y' = 0$ får vi $\left(4\cos\left(\frac{\pi u}{2}\right)+3\right)y + x^2 - 1 = 0$, vilket tillsammans med $y = 0$ ger oss $x = \pm 1$. Vi har alltså två kritiska punkter, den ena $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ och den andra $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

c) Från föreläsningarna vet vi att en gränscykel måste omsluta en kritisk punkt. Utifrån uppgiften ovan får vi alltså att en gränscykel måste gå runt antingen $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ eller $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Vi vill utesluta möjligheten att den enbart går runt den första av dessa punkter.

Från föreläsningarna vet vi även att om en gränscykel omsluter endast en kritisk punkt, då kan den punkten inte vara en sadelpunkt. Vi kan således kontrollera punkten $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, och om den visar sig vara en sadelpunkt så har vi lyckats visa att en gränscykel måste gå runt den andra punkten. För att kontrollera om vi har en sadelpunkt vill vi bestämma egenvärdena hos Jakobianen. Jakobianen ges av

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\pi}{2}4\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)y - 2x & 4\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)+3 \end{pmatrix}$$

I punkten $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ får vi

$$J(-1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

För egenvärdena får vi

$$\det(J(-1,0)-\lambda I) = \lambda^2 - 3\lambda - 2,$$

vilket har rötterna

$$\lambda_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{17}}{2}.$$

Eftersom $\sqrt{17} > 3$ får vi ett positivt och ett negativt egenvärde. Vi kan då konstatera att $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ är en sadelpunkt.

Analysen ovan ger oss att en eventuell gränscykel måste innehålla punkten $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, vilket var vad vi ville visa.

Lösning till problem 8. **a)** De kritiska punkterna ges av

$$\begin{cases} 0 &= 5x^7 + 5y^7 \\ 0 &= -3x^5 + y^3 \end{cases}.$$

Den första ekvationen ger oss $y = -x$. Sätter vi in detta i den andra ekvationen får vi $-3x^5 - x^3 = 0$. Skriver vi om detta som $x^3(1 + 3x^2) = 0$ ser vi att den enda lösningen är $x = 0$, vilket direkt ger $x = 0$. Den enda kritiska punkten är således $(0, 0)$.

Jakobianen ges av

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} 35x^6 & 35y^6 \\ -15x^4 & 3y^2 \end{pmatrix}$$

och vid origo får vi

$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

För egenvärdena har vi

$$\det(J(0, 0) - \lambda I) = \lambda^2,$$

så 0 är ett dubbelt egenvärde. När 0 är enda egenvärdet får vi ingen information om stabiliteten.

b) Vi ansätter $V(x, y) = ax^k + by^l$ som Liapunovfunktion. Vi börjar med att beräkna derivatan av V med avseende på systemet, vi får

$$\frac{dV}{dt} = kax^{k-1}(5x^7 + 5y^7) + lby^{l-1}(-3x^5 + y^3) = 5kax^{k+6} + 5kax^{k-1}y^7 - 3lbx^5y^{l-1} + lby^{l+2}.$$

Vårt mål är att få $\frac{dV}{dt}$ antingen positivt eller negativt definit. Till att börja med vill vi bli av med termerna $5kax^{k-1}y^7$ och $-3lbx^5y^{l-1}$ vars tecken beror på y respektive x. Vi ser att vi med rätt val av parametrar kan få dessa termer att ta ut varandra. Väljer vi $k = 6$ och $l = 8$ får vi

$$\frac{dV}{dt} = 30ax^{12} + (30a - 24b)x^5y^7 + 8by^{10}.$$

Tar vi, exempelvis, $a = 4$ och $b = 5$ försvinner mittentermen, och vi får kvar

$$\frac{dV}{dt} = 120x^{12} + 40y^{10},$$

vilket är en positivt definit funktion.

Med ovan val av parametrar har vi

$$V(x, y) = 4x^6 + 5y^8,$$

vilket även det är en positivt definit funktion. Med detta val av V är alltså både V och $\frac{dV}{dt}$ positivt definita funktioner, vilket vi vet implicerar att punkten är instabil.